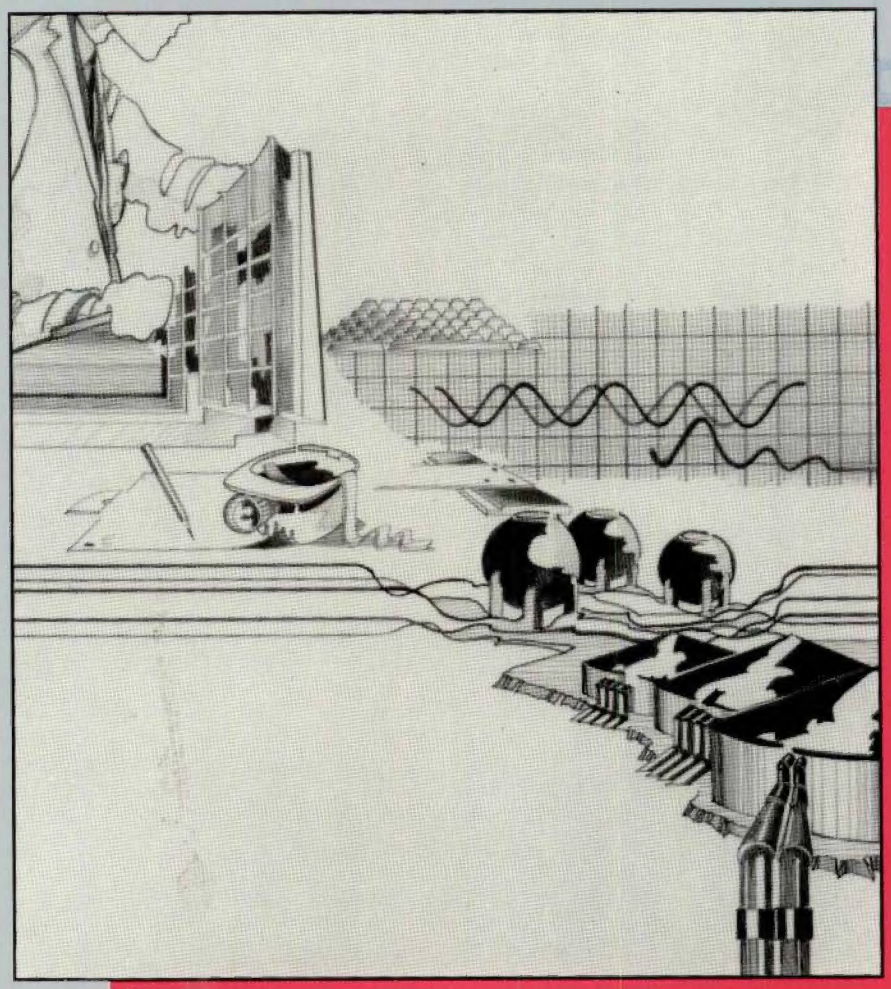
técnica

861
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
N.º
BIBLIOTECA



Revista de Engenharia
Publicação da Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

N.º 1 • 88 - ABRIL 1988 - Esc. 150$00

Novidades IBM

Algo para o ajudar a decidir se necessita de um vulgar computador pessoal ou de um novo Personal System/2

O modelo 50

Com o anúncio do IBM Personal System/2 alterámos a face do mundo dos computadores pessoais, oferecendo-lhe o futuro hoje mesmo.

Mas como é que vai saber se a sua empresa necessita da potência de um IBM Personal System/2? Faça a si próprio estas simples perguntas.

Precisa de utilizar uma máquina que ultrapassa as dimensões habituais de memória e abre caminho a aplicações e programas muito mais potentes?

Sente-se limitado com o espaço de armazenamento do seu actual computador pessoal? Gostaria de ter uma capacidade de memória dez vezes superior?

Gostaria de trabalhar com um monitor que lhe permitisse uma escolha entre 262.144 nuances de cor e imagens com uma qualidade quase fotográfica?

Está preocupado com o futuro dos computadores pessoais que possui actualmente e gostaria de ter a certeza de que serão compatíveis com futuros produtos?

Conversores que facilitam a migração e a compatibilidade

Por vezes sente-se frustrado com o tempo que o seu computador pessoal leva a executar determinadas tarefas? Gostaria de uma máquina que trabalhasse muito mais rapidamente?

O Microprocessador Intel 80386: um dos processadores mais rápidos do mundo.

Se a sua resposta a estas perguntas for afirmativa, é provável que queira pôr algumas questões acerca da mais sugestiva linha de produtos desde que a IBM apresentou o Computador Pessoal.

Para obter documentação, em português e com linguagem acessível, acerca de todos os modelos do Personal System/2, visite um dos nossos Concessionários Autorizados. É gratuito. E pode ser este o seu primeiro passo para o escritório do futuro.

IBM

Little Tramp Character Licensed by Bubbles Inc. S.A.

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
N.º 851
BIBLIOTECA

N.º 1 • ABRIL DE 1988

técnica Revista de Engenharia
Publicação da Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

PROPRIEDADE DA ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO • **DIRECTOR:** M. DE ABREU FARO • **COORDENADORES EDITORIAL:** ISABEL ELIAS E HÉLIO SOARES • **DIRECÇÃO E ADMINISTRAÇÃO:** AEIST - Av. Rovisco Pais, 1000 LISBOA - TELS.: 88 93 23/88 10 18 • **PUBLICIDADE** TÉCNICA - AEIST - Av. Rovisco Pais, 1000 LISBOA - TELS.: 88 10 18/89 75 15 • **COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:** CABOGRÁFICA, LDA., Rua das Biscoiteiras, Lote 18 (traseiras) - 2795 LINDA-A-VELHA • PUBLICAÇÃO TRIMESTRAL - 5000 EXEMPLARES • ASSINATURAS (4 números): PORTUGAL 500$00 - ESTRANGEIRO 12 US$.

EDITORIAL

Alguns problemas alheios à nossa vontade explicam de modo geral a não periodicidade esperada pela TÉCNICA.

Quanto ao material para publicação, e exceptuando os *Artigos Convidados*, continuamos a ter insuficiência de originais nas outras duas rubricas.

Pode afirmar-se que o material científico, pertinente para uma revista deste âmbito não só aumentou, o que comprova o desenvolvimento da TÉCNICA, como melhorou quantitativamente. Espera-se que este facto se traduza em regularidade, e que essa regularidade atrai novos colaboradores.

A TÉCNICA manter-se-á fiél aos seguintes princípios: Material científico de qualidade e divulgação científica apenas quando for subscrita por especialista capaz de sínteses de interesse e cientificamente correctas.

SUMÁRIO

ARTIGOS CONVIDADOS

ENSAIO SOBRE OS PRINCIPIOS DE MECHANICA — 8
José Anastácio da Cunha
Nota introdutória A. Brotas e E.B. Pires

UMA INTRODUÇÃO À AXIOMÁTICA DA TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES DE J. SEBASTIÃO E SILVA — 25
J. Campos Ferreira

ARTIGOS

OBJECTIVOS DE DESENVOLVIMENTO ECONÓMICO EM PORTUGAL E A SUA ARTICULAÇÃO COM A POLÍTICA COMUNITÁRIA — 35
Marco António Monteiro d'Oliveira

NOTAS CIENTÍFICAS

STATIONARY STATES ANALYSIS IN TRAVELLING WAVES ON LOSSLESS LINES AND PHYSICAL REALITY — 45
M. de Abreu Faro

PROPRIEDADES DE TRANSPORTE DO NAFION 120 EM SOLUÇÕES DE SODA CÁUSTICA — 51
C.A.C. Sequeira, J.P. Pitta de Oliveira, M.P. Sá da Costa e M.N. de Pinho

TURBOALIMENTAÇÃO DOS MOTORES DE COMBUSTÃO INTERNA: Princípios, Objectivos e Limitações — 56
F. Almeida e Castro

UNIDADE CAMAC DE LEITURA RÁPIDA E CODIFICAÇÃO — 66
Gaspar Barreira, Augusto Casaca, Paulo Gomes e João Varela

FORMATION OF DIFFUSION COATINGS ON IRON AND STEEL PART II: THEORETICAL CONSIDERATIONS — 74
C.A.C. Sequeira, A.M.G. Pacheco and G.M.G.S. Nunes

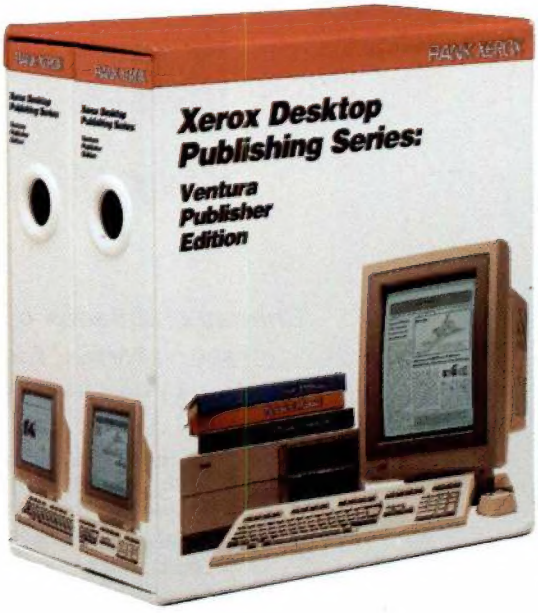
Xerox

do Informático
os : Qual a perspectiva?
O CD-ROM Abre Novas
"O Xerox Ventura Publisher é para a nova geração de computadores pessoais o que o Lotus 1-2-3 representou para a anterior."
DAVID GOODSTEIN
InterConsult
Area
Bar
Column
HiLo
Line
Mixed
Pie
Scatter
GALLERY: Area Bar Column HiLo Line Mixed Pie Scatter
Select option or type command letter
Chart
100% Free NL Microsoft Chart:
"... possui folhas de estilo e outras características poderosas que transformarão rapidamente documentos longos em trabalhos organizados e atraentes."
DIANE BURNS
PC Magazine
"Uma novidade em boa hora apresentada. Um produto excelente e muito fácil de utilizar."
AJIT KAPOOR
Dataquest
XEROX
Mesa Ficheiros Editar Ver Página Caixa Parágrafo Gráfico Opções
C:\TYPESET\NOTICIAS.CHP (NOTICIAS.STY)
Notícias do Ventura
EDIÇÃO ESPECIAL
RANK XEROX PORTUGAL, LDA.
Rank Xerox Apresenta Ventura Publisher 1.1
Shuttle
XEROX

RANK XEROX

ventura publisher em português

Agora já pode aderir à revolução da **edição electrónica!**
Chegou o internacionalmente aclamado **Xerox Ventura Publisher,** o mais rápido, simples e versátil package para «desktop publishing» desenvolvido até hoje. E em Português!
No **Ventura** encontra folhas de estilo, formatos de página e parágrafos pré-definidos, que fazem automaticamente a composição de texto e gráficos em livros, revistas, catálogos, apresentações, relatórios. O que quizer!
Admire o **Ventura** a fazer a composição à espantosa velocidade de 20.000 caracteres por segundo, página após página, formatando até 128 capítulos com mais de 500 páginas cada, incluindo a hifenização em Português!
Utilize o **Ventura** no seu Xerox ou outro PC compatível XT ou AT, visualizando-o em qualquer écran standard CGA, EGC, EGA, VGA ou num dos écrans **Xerox Full Page** ou **Double Page Display.**
Inclua e ajuste gráficos ou imagens digitalizadas por scanner. Emende e reformate texto, títulos, notas, desenhos, corpos de letra, espaçamentos, colunas, filetes ou separadores. E quando tiver acabado, numere automaticamente páginas, capítulos, secções, notas e ilustrações, criando de imediato índices geral, remissivo e de figuras.
Finalmente, mande imprimir o seu trabalho numa **impressora laser** ou **Ink-jet,** como as Xerox Laser 4045 ou a Laser Xerox 4020 Ink-jet a cores, para uma arte final de alta qualidade, ou então utilize mesmo uma impressora de matriz.
Ou então crie um original em **Interpress** ou **PostScript** para fotocomposição.
*O dinheiro que vai poupar no seu primeiro catálogo de uma dezena de páginas vai provavelmente cobrir o custo dos **Xerox Ventura Publisher*** — o super-software ao serviço da sua super--empresa.



Informe-se já, através da linha directa
☎ 01-54 04 88

Xerox o diálogo inteligente

Cimianto

SOCIEDADE TÉCNICA DE HIDRÁULICA, SA

Chapas onduladas curvas, chapas lisas, caleiras, colmeias reservatórios, fossas sépticas, floreiras, etc., etc.,

– Assistência Técnica, orçamentos e montagens ao dispor dos Ex.mos Clientes.

Sede: Av. Fontes Pereira de Melo, 14 – 1000 LISBOA
Telefs.: 53 1161-560161 – Telex: 18513 CIANTO P
Corresp.: Apartado 1008 - 1001 LISBOA CODEX – Teleg.: CIMIANTO

Delegação Norte: Lugar de Marcos, E.N. 107 (ao km 8,5) Moreira - 4470 MAIA
Telefs.: 948 69 52 - 948 63 58 – Telex: 26737 CIANTO P

Fábrica: Alhandra - 2600 VILA FRANCA DE XIRA
Telefs.: 250 18 62 - 250 11 25 - 250 18 30 – Telex: 16075 CIANTO P

TIMING

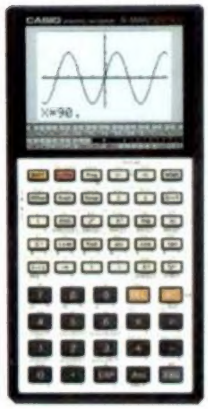
POR ALGUMA RAZÃO SOMOS OS PRIMEIROS EM VENDAS

O INACÓPIA através das suas principais características conquistou não só o público consumidor, mas também a maioria dos fabricantes de fotocopiadores.
Assim orgulhamo-nos da vossa preferência e agradecemos a vossa colaboração na meta que nos propusemos atingir.

inacópia

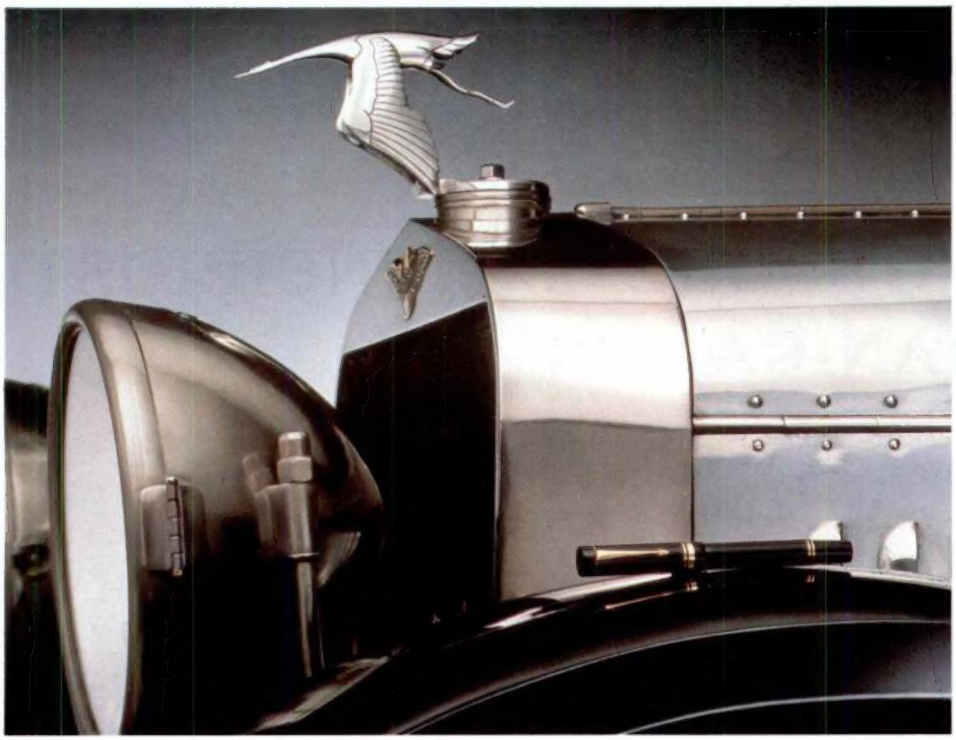
o seu papel de fotocópia

Produzido por inapa



INÉDITO SOCIEDADE DE REPRESENTAÇÕES, LDA.

RUA DOS FANQUEIROS, 250, 2.º ESQ. ☎ 875640/1 1100 LISBOA



Não admira que já não se fabriquem carros como dantes. Fabricar uma caneta já é bem difícil.

Oh, que linhas elegantes do Hispano-Suiza de 1925! Oh, que linhas elegantes as da Parker Duofold de 1927!

Há já muito tempo que o automóvel é inacessível, mas a caneta, regressa felizmente de novo.

Desde há muito ansiávamos recriar este design prestigioso da Parker.

O nosso próximo centenário forneceu-nos o desejado pretexto.

Tal como os actuais "carros de sonho", a Parker Duofold Centennial cinzela peças que são autênticas obras-primas.

E por outro lado, orgulha-se de as produzir com tais cuidados que parecem fabricadas como nos velhos tempos.

Em vez de moldar o corpo e a tampa, fizémo-los a partir de um bloco sólido, como então.

Em vez de talhar o aparo em metal moderno, continuamos fiéis ao ouro.

Em vez de fender o aparo com um qualquer dispositivo moderno, ainda o fazemos manualmente, utilizando uma lâmina mais fina que um cabelo.

É um processo extenuante de fabricar uma caneta. Mas, tal como o Hispano-Suiza, o estilo e o prazer de usar são amplamente compensadores.

PARKER

ENSAIO SOBRE OS PRINCIPIOS DE MECHANICA

por **José Anastácio da Cunha**

Nota introdutória

Cumpriu-se em 1987 o bicentenário da morte de José Anastácio da Cunha. No propósito de homenagear este insigne matemático e poeta português do século XVII e entre outras iniciativas que certamente serão promovidas durante o corrente ano, não quisemos deixar de aproveitar a opurtunidade oferecida pela Técnica, que desde já agradecemos, de divulgar entre os docentes e alunos do Instituto Superior Técnico uma das suas obras, precisamente o *Ensaio sobre os Princípios da Mechanica*.

José Anastácio da Cunha, que nasceu em Lisboa em 1744, cedo revelou interesse pelo estudo da física e da matemática. Os progressos que fez nesses estudos conduziram à escrita, em 1769, quando era Tenente de Artilharia em Valença do Minho, duma *Memória sobre Balistica* na qual provava serem erróneas algumas teorias que então serviam de guia aos oficiais de artilharia portuguesa e propunha teorias novas. Este trabalho tornou-o conhecido do Marquês de Pombal que, em 1773, o nomeou lente da Universidade de Coimbra onde regeu a cadeira de Geometria até ao ano de 1778. Nesse mesmo ano foi José Anastácio denunciado à Inquisição que o prendeu e o condenou à reclusão na casa do Oratório, local onde redigiu a sua obra-prima "*Principios Mathematicos*". No ínicio desta obra José Anastácio da Cunha escreve um conjunto de definições das quais não queremos deixar de referir a primeira: "O corpo cujo movimento é tal que de se não atender a ele não resulta erro notável chama-se Ponto." Os "*Principios Mathematicos*" contêm contribuições originais para os fundamentos da Análise Infinitesimal, nomeadamente uma nova teoria da função exponencial a^x, a definição de diferencial duma função real de variável real equivalente àquela que se passou a utilizar após Cauchy e a primeira definição rigorosa de convergência de uma série. Estas contribuições são anteriores, em algumas décadas, à data em que são historicamente situadas. A primeira das três inovações acima indicadas foi do conhecimento de Gauss que a ela se referiu, elogiosamente, numa carta a Bessel em 1811.

Posto em liberdade, mas não restituído à Universidade, foi, no entanto, aproveitado por Pina Manique como professor de matemática e director do Colégio de S. Lucas da Real Casa Pia à qual ficou ligado até à sua morte em 1787. José Anastácio da Cunha foi também autor duma notável obra poética que o Professor Hernani Cidade coligiu, considerando-a como precurssora do romantismo. Sobre a sua vida também se debruçou Aquilino Ribeiro no seu livro "Anatácio da Cunha, o lente penitenciado".

O *Ensaio sobre os Principios de Mechanica* foi publicado postumamente em Londres, em 1807, graças à iniciativa dum seu amigo, o Conde do Funchal, Dom Domingos de Souza Coutinho, que possuía o manuscrito original. Sobre este ensaio foram escritas umas notas pelo sábio português Silvestre Pinheiro Ferreira, impressas em Amesterdão, em 1808, e nas quais o autor, para além

de elogiar a obra, tece diversas observações e críticas.

A reedição que agora se faz é uma reimpressão do ensaio feito em 1856 no volume 4 da revista "O Instituto" de Coimbra, Pags. 212-214, 222-223 e 236-238 por iniciativa de F. Castro Freire.

O *Ensaio sobre os Principios de Mechanica*, provavelmente escrito entre 1738 e 1786, é notável pela clareza das ideias e por ser uma das primeiras tentativas no sentido de estabelecer uma axiomática explícita para a Mecânica Newtoniana.

Refira-se, a finalizar, que foi criada em Lisboa, por iniciativa do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciencias da Universidade de Lisboa, uma Comissão de Homenagem a José Anastácio da Cunha à qual aderiram diversas instituições entre as quais os Departamentos de Física, Engenharia Civil e Matemática do IST. Esta comissão levou a cabo, no final do passado ano, diversas iniciativas. Entre elas contou-se a realização de um Colóquio Internacional que trouxe a Portugal alguns especialistas europeus em História da Matemática: E. Giusti (Itália), Grattan-Guiness (Reino Unido) e J. Mawhin (Bélgica). As actas deste colóquio serão publicadas em breve. Para além da cunhagem duma medalha evocativa realizou-se uma exposição sobre José Anastácio da Cunha que esteve patente ao público na Biblioteca Nacional.

Lisboa, Janeiro de 1988
A. Brotas
E. B. Pires

ENSAIO SOBRE PRINCIPIOS DE MECHANICA

por
J. ANASTÁCIO DA CUNHA

Na maior parte dos innumeraveis livros, que se tem escripto sobre a mechanica, tudo parece facil; e as chamadas demonstrações dos mesmos pontos, que por fim se tem achado escurissimos e mui difficultosos, principiam constantemente pelas costumadas formulas, *il est clair; il est evident; il est visible; il est palpable*, etc. Mas vieram grandes geometras, e grandes philosophos, e quasi todos os principios fundamentaes d´esta sciencia appareceram cercados de difficuldades, d´onde rebentaram muitas, mui renhidas, e ainda não esquecidas controversias.

Desde que os philosophos principiaram a conhecer os damnos que resultam do abuso da metaphysica, e a desconfiar d´ella; desenganados, que de cem disputas, quem gera, mantem e propaga as noventa e nove, é a escuridade e a equivocação annexa a certos termos abstractos, cujos objectos são puramente imaginarios, meros entes de razão; ou para fallar mais claro, uns termos, que, a não se tomarem unicamente como abbreviações das descripções prolixas de alguns phenomenos, não têm objecto real; entraram a clamar, que o erro está em attribuir existencia, ou physica, ou mathematica, e analogias geometricas a essas entidades fantasticas, vulgarmente designadas pelas palavras, *velocidade, movimento, força*, etc.

Outra equivocação, que me não lembro de ter ainda achado sufficientemente exposta, ainda que mui principal (talvez a mais principal) entre as que têm dividido em bandos e seitas os mathematicos e escandalisado os profanos é a que procede de se não distinguir, se o tractado de mechanica, á cêrca do qual se disputa, é puramente mathematico ou se tambem é physico. A Dynamica de Mr. d'Alembert, v. g., é puramente mathematica: a obra dos principios é physico-mathematica. O auctor de um tractado puramente mathematico, pode-se dizer que é um legislador, um creador; o auctor de um tratado mathematico de physica, é um mero interprete e commentador da natureza. A verdade mathematica não consiste senão na legitimidade com que os teoremas e as soluções dos problemas derivam das definições, postulados e axiomas; porém as definições, postulados e axiomas, pode dizer-se que a nenhuma lei são sujeitos. D'aqui vem que muitas coisas, que na physica são e devem ser objectos de demonstração experimental, na mathematica nem devem nem ordinariamente podem ser demonstradas. E de quererem pôr nos tractados mathematicos como theoremas, o que deviam pôr como definições ou axiomas, e de teimarem nos tractados physicos em demonstrar mathematicamente o que só a experiência póde provar, tem resultado muito principalmente tantas alterações.

Verei se exponho mais claramente o meu pensamento, exemplificando-o.

BIBLIOTECA DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO LISBOA

Nos principios mathematicos de philosophia natural não há definições senão de nomes: não há axiomas[1], , nem postulados, nem λχυδανομενα; ha *leges motus* ensinadas pela natureza; isto é, indagadas e confirmadas pela experiencia: o que a isto se segue, é que é tudo mathematico. Em fim o auctor de um tratado mathematico de physica é um geometra que resolve problemas propostos pela natureza: se omitte algum dos dados, se os altera, se lhes substitue outros, ja o problema que resolve, não é o que se lhe propôz, já o geometra não é se não o auctor de uma novella.

Como auctor de uma novella se póde, por outra parte, considerar quem compõe um tractado puramente mathematico. Goza dos mesmos privilegios que se concedem *pictoribus atque poetis*. Posso, v.g., inventar uma nova curva e demonstrar varias das suas propriedades. Posso escrever um tractado d'optica, em que tome como hypothese, que a luz se propaga não em linha recta mas em linha circular, ou em qualquer outra linha. Posso compor uma mechanica, supondo as leis do movimento que eu muito quizer. E se os meus theoremas e as minhas soluções dos problemas forem legitimamente derivadas dos principios que estabeleci, ninguem me poderá arguir de erro.

Poderão sim censurar-me de ter indignamente abusado do precioso tempo, se essas bem ajustadas e talvez elegantes theorias se não poderem aplicar a philosophia natural; se d'ellas não podér tirar o genero humano utilidade: e esta só consideração é que pode e deve pôr limites à imaginação do inventor. Por isso o geometra, que não quizer incorrer na censura, de *inutil* deve tomar por principios ou hypoteses noções communs, verdades de facto que a natureza, que a experiencia ensinam: então o physico mostrando que os corpos naturaes são (ou exacta ou proximamente) dotados d'aquellas mesmas propriedades, que o geometra suppoz nos corpos mathematicos, poderá fazer uma feliz applicação da theoria puramente mathematica a alguns assumptos physicos.

Assim no livro dos principios as leis intituladas do *movimento*, não vem demonstradas geometricamente; mas de serem realmente as leis que a natureza realmente segue, dá sir Isaac por fiadora a mesma natureza: quero dizer que as abona com a experiencia.

---

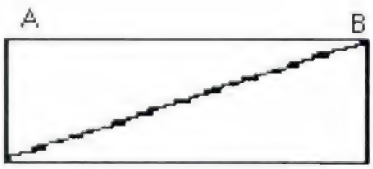
[1] tómo esta palavra no sentido mais vulgar, isto é, proposição em si mesmo evidente

Os auctores que depois têm escripto sobre o mesmo assumpto (e alguns d'elles grandes geometras) têm-se empenhado em achar demonstrações mathematicas d'aquellas leis, - porém debalde.

Debalde; e para fallar com propriedade, nem parallogismos mathematicos se podem chamar os que offerecem como demonstrações, pois se fundam em principios ou subtilezas que antes pertencem ao que chamam de ontologia e cosmologia.

A *inercia* dos corpos, e a composição e resolução do movimento, tem sido principalmente objecto das fadigas de alguns dos maiores geometras. Mas, se o tractado que escreveis é puramente mathematico, a inercia vae sempre incluida na hypothese. Todas as vezes que em um theorema ou problema suppuzerdes o corpo quieto, quieto o tereis, porque assim o suppuzestes; porque outra coisa seria contra a supposição. Se tendes estabelecido algumas leis, segundo as quaes alguma causa em certas circumstancias altera o estado de um corpo quieto; e se na hypothese se inclue a presença d'essa causa e d'essas circumstancias, para algum determinado instante; nesse instante se executará a mudança conforme as leis suppostas; e não por outra razão, senão porque qualquer outra coisa seria contra a supposição. Similhantemente se póde discorrer á cerca do corpo que se move. Assim, querer provar em um tractado puramente mathematico a inercia dos corpos, é querer provar o mesmo que se supoz; e que demonstrações se podem esperar de tão ageometrica pertenção, que não sejam illusorias?

A composição do movimento não póde entrar em um tractado puramente mathematico se não como hypothese, ou λχυδανομεν



Ha uma causa, razão ou motivo, que, por si só, faria que um movel, actualmente em A, descrevesse a recta AB, no tempo em que outra causa, por si só, lhe faria descrever a recta AC: que ha de resultar d'estas duas causas junctas? Todos principiam inferindo ou expressa ou tacticamente que de haver uma razão para que o movel descreva a recta AB, e no mesmo tempo outra razão para que descreva a recta AC; e de não poder o movel descrever ambas

as rectas a um tempo: se segue que ha de descrever uma recta no plano BAC dentro do angulo BAC. E depois de dizerem, conforme o costume que isto é *evidente* ou *palpável*, vae cada um, como póde, edificando sobre este alicerce a sua demonstração. - Que o movel não ha de descrever as rectas AB e AC no mesmo tempo, evidente é: mas o que deve resultar do conflicto das duas causas contradictórias: se ha de descrever uma recta depois da outra; se ha de descrever alguma outra linha; e que linha; e em que direcção; se ha de ficar parado ; se se ha de aniquilar o grande Euler; transformar ; etc. etc. etc.; quem o póde mostrar *a priori* ? Hallucina-nos, por uma parte a phisica, mostrando-nos o que neste casos succede nos corpos naturaes; e por outra, a ambição de dar

...o que deu a razão a tudo e a todos ; [2]

ambição, que nos leva a supor uma serie de demontrações infinita, e por consequinte impossivel e absurda; ou nos faz cahir no circulo logico.

Façamos abstracção do que achamos na natureza a cerca da composição do movimento e comparemos o argumento acima com o seguinte. "O movel deve por uma razão achar-se na recta AB; por outra na recta AC; logo não sahirá do ponto A, que é o único ponto commum ás duas notas." Qual parecerá mais evidente ou mais bem fundado a um entendimento livre de preoccupação? O ultimo ao menos assemelha-se muito á demonstração da proposição IX do 3º Liv. dos Elem. de Euclides. Mas vós (me dirá quem propõe o outro) não metteis na conta uma circumstancia das mais essenciaes da hypothese; não fallaes no movimento -- Isso remedêa-se facilmente: direi pois assim:"Deve mover-se na recta AB; tambem na recta AC; logo mover-se-ha no ponto A; e sómmente no ponto A, pois só elle é comum ás duas rectas. " Se vos espanta um movimento sem mudança de logar; dir-vos-hei que o movel se move no ponto A com uma velociade *infinitamente pequena*. Se ainda esta resposta vos não satisfaz, confesso, que não sei como vos possa obrigar a admittil-a; mas remeter-vos-hei aos modernos analystas methaphysicos, os quaes professam explicar similhantes noções com a maior *facilidade, clareza e evidencia* - Oh! Methaphysica! Methaphysica! se todos bem ponderassem quanto és versatil!

Não; nem da inercia dos corpos, nem da composição, nem da comunicação do movimento, podem os homens dar outra prova senão a experiencia; nem outra razão, senão a livre escolha do creador.

Em um tractado puramente mathematico já observámos que é creador o mesmo geometra que o compõe. Em um tractado mathematico de physica, nada poderá dizer com verdade , que não seja legitimamente derivado das leis, a que o Ser Supremo sujeitou a natureza.

Perguntemos pois á natureza mesma quaes são estas leis: perguntemos-lhe por via da experiencia mas com sinceridade, com docilidade. Se ella mesma nol-o não ensinar; se ella mesma nos não disser o seu segredo; debalde martyrisaremos a imaginação para que nol-o descubra. Desenganem-nos as freneticas e frustradas tentativas de tantos presumidos (e alguns na realidade grandes) engenhos, que aspirando a uma independencia absurda, desprezando-se de aprender, cuidaram que tudo podiam adivinhar.

Não me demorarei com outras questões; taes como a theoria methaphysica da communicação do movimento; a razão porque é, $Fdt=dv$; as forças vivas de Leibnitz; etc. porque me parecem (e digo-o com toda a humildade que posso) totalmente inuteis. Todas nascem, e se mantem de attribuirem aos auctores sujeito realmente existente aos nomes velocidade, movimento, força, etc. que na realidade carecem de sujeito.

Nos principios que proponho, denoto com alguns d'estes nomes certas linhas ou numeros;-- não como realmente existentes nem ainda como proporcionaes a alguns entes realmente existentes, pois taes entes não há. - Estas linhas ou numeros (mesmo na aplicação da mechanica mathematica á philosophia natural) são meros symbolos (symbolos arbitrarios) que depois de combinados, ou desinvolvidos *secundum artem*, denotam ou determinam, que relação ha entre os espaços descriptos em certos tempos, ou entre os tempos em que se descreveram certos espaços. Escolhi estas linhas ou numeros e os seus nomes, de sorte, que mesmo com a significação assim alterada, possam quadrar ás excellentes lucubrações geometricas e analyticas, com que grandes geometras têm enriquecido o mundo.--Assim (se o desejo me não engana) ficará a mechanica mathematica verdadeiramente mathematica sem mistura; e poderá ajudar a philosophia natural a desviar-se da perigosa companhia da methaphysica.

Definições

I. O extremo (principio ou fim) de qualquer porção de tempo, chama-se *instante*.

II. O ponto que muda continuamente de logar, isto é, que não persiste tempo algum no mesmo logar,

nem occupa no mesmo instante dois logares; diz-se, que se *move*, e se chama *ponto movel*, ou somente *movel*.

Axioma

I. O ponto movel descreve uma linha.

Definição

III. Esta linha chame-se *espaço*.

Postulado

Haja uma linha que seja como o tempo, que o movel gasta em descrever o espaço.

Definição

IV. Essa linha chame-se *tempo*.

Hypothese

I. Entre o espaço e o tempo haja relação determinada

Definições

V. *Velocidade* de um movel em qualquer ponto do espaço que descreve é o expoente da razão que tem *ultimamente* o espaço infinitesimo, que alli principia a descrever, para o tempo em que o ha-de descrever.

VI. Direcção do movel, ou tambem da sua velocidade, ou tambem da sua acceleração no principio do espaço, é a recta tirada por esse ponto de sorte que não faça angulo com o espaço.

VII. Velocidades, cujas direcções são contrarias, são contrarias.

VIII. Acceleração de um movel em qualquer instante, é o expoente da razão que tem *ultimamente* para o tempo infinitesimo, que alli nasce, a velocidade que alli nasce com esse tempo, e com elle cresce.

IX. Acceleraçoes, cujas direcções são contrárias, são contrarias.

Proposições

I. Seja e um espaço descrito no tempo t; e v a velocidade do movel no fim d´esse tempo. Será

$$v = \frac{de}{dt}$$

Deriva-se facilmente da definição V, e da natureza das fluxões.

II. Se v é constante, será

$$v = \frac{e}{t};$$

e logo e como t.

Porque

$$v = \frac{de}{dt}$$

dá $vdt = de$; e logo, por ser v constante, $vt = e$.

III. Seja E outro espaço descripto no tempo T; e V a velocidade do movel no fim desse tempo. Se v e V forem constantes, serão directamente como e, E; e inversamente como t, T.

Porque será

$$v = \frac{e}{t}, \qquad V = \frac{E}{T} \qquad (prop.\ 2)$$

IV. Seja a a acceleração do movel no fim espaço e. Será

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Seja t' o tempo infinitesimo, que principia no fim do tempo t', e v´ *a velocidade que nasce e cresce* com t'; será a o expoente da razão que tem ultimamente v' para t' (Def. 8). Mas as velocidades nos fins dos tempos t e $t + t'$ são v e $v + v$; logo é

$$\frac{dv}{dt}$$

o expoente da razão que tem ultimamente v' para t' Defin. das flux.) É logo

$$a = \frac{dv}{dt}$$

COROL. Logo é $adt = dv$, e $\int adt = v$.

V. Também $ade = vdv$, ou $2\int ade = v^2$.

Porque expulsando dt das equações $adt = dv$, e

$$v = \frac{de}{dt}$$

sahe $ade = vdv$.

VI. Se e é constante como t' é a constante; e se a é constante, é e como t^2.

Porque se e é como t^2, seja b a linha constante

$$= \frac{t^2}{e};$$

será

$$\frac{de}{dt} = \frac{2t}{b}:$$

mas é

$$v = \frac{de}{dt};$$

logo

$$dv = \frac{2dt}{b}.$$

Esta equação, e a equação $adt = dv$ dão

$$a = \frac{2}{b}$$

Sendo a constante, será $at = v$. Mas é

$$v = \frac{de}{dt}$$

logo $atdt = de$; e logo $\frac{1}{2}at' = e$.

COROL Nestes casos é v como t; e *vice versa*.

Hypotheses

II Se ha alguma razão ou motivo para que um movel descreva acceleradamente um espaço, outro motivo ao mesmo tempo para que descreva outro espaço, e outro motivo ao mesmo tempo para que

descreva outro espaço; posto o movel em um ponto, que seja principio commum dos trez espaços, e ao redor do qual elles formem trez angulos, cujos senos sejam entre si como as acceleraçoes correspondentes aos espaços oppostos; não resultará dos dictos trez motivos movimento algum. III Se os motivos o forem, não de acceleraçoes, mas de velocidades, as quaes sejam entre si como os dictos senos; tambem não resultará movimento algum.

D´estas duas hypotheses se deriva facil e geometricamente o mais, que se sabe sobre o que chamam composição e resolução do movimento; a differença entre o movimento constrangido quando o espaço é anguloso ou quando é continuamente curvo; a theorica do equilibrio quando o movel é um só, e os motivos do movimento diversos; ou quando os moveis são dois, ou trez, ou mais e fixos em alguma linha inflexível, etc. etc.

A theorica chamada das forças centraes, é a do movimento que resulta de haver em cada instante algum motivo de acceleração dirigida a algum ponto dado, e ao mesmo tempo outro motivo, ou de velocidade constante ou de acceleração dirigida para outra parte. Resolvem-se similhantes problemas substituindo ao motivo da acceleração successivos motivos de velocidades constantes, e buscando o que deve sahir *ultimamente*, sendo infinito o numero d´estes motivos, e infinitesimas as velocidades; assim como o practicou Sir Isaac Newton, e outros depois d'elle.

As leis fundamentaes da percussão, e collisão devem ser hypotheses, preceddidas d´um postulado, em que se estabeleça relação e quantidade, ou o que chamam *massa*, nos moveis.

Seguem-se as theoricas dos centros de gravidade, de oscillação, de percursão, momentos de inercia, etc. etc.

Na hydrostatica e hydraulica, apezar de tantas e tão sublimes lucubrações dos maiores geometras, devemos confessar que tem a mathematica bem pouco que fazer. Ahi tambem quasi todos os principios fundamentaes não podem ser senão hypotheses. Um geometra deve ter por desdoiro vender por demonstração geometrica o que o não é.

Ou podem-se approveitar os excellentes escritos dos grandes geometras mudando a significação a certos termos que usam. Por exemplo, suppondo que a *força acceleratriz* significa um motivo de acceleração, seja esse motivo qual for, patente ou occulto, real ou imaginado. *Quantidade de força acceleratriz* seja o que defini *acceleração*. *Potencia*, signifique um motivo qualquer, ou de acceleração ou de velocidade constante, conforme as occasiões, etc. etc.

Podem-se assim desterrar da mathematica os entes chimericos, que na realidade a têm deslustrado, fazendo-a tão contenciosa, tão incerta como a mais acrea methaphysica.

Prezo-me de seguir nisto os passos d'um geometra e philosopho tão grande como se sabe que é M.d´Alembert."Tout ce que nous voyons,"diz elle,"bien distinctement dans le mouvement d´un corps, c´est qu´il parcourt un certain espace, et qu´ l employe un certain temps à le parcourir. C´est onc de cette seule idée qu´on doit tirer tous les rincipes de la mechanique, quand on veut les emonstrer d´une maniere nette et précise; ainsi on e sera point surpris qu´en consequence de cette eflexion .... j´aie entiérement proscrit les forces nhérentes au corps en mouvement, êtres obscurs et etaphysiques, qui ne sont pas capables que de éprandre des ténebres sur une science claire par lle meme."

Comtudo em varias cousas desvio-me de M.d´ Alembert; e pois me prézo tanto de o seguir, devo ar a razão porque então me desvio d´elle. Direi ois, que só o faço quando elle recorre a argumentos ethaphysicos para introduzir como theoremas na athematica o que elle não pode admittir senão omo hypotheses, ou λαυδανουινα. Não direi sobre ste ponto mais nada senão que me parece claro que esmo M. d´Alembert reconhece toda a differença ue vai de taes demonstrações a todas as mais , ujo rigor geometrico, e superior elegancia esplandece no seu aureo tractado de Dynamica. m abono d´este pensamento ponderem-se estas alavras, que vem no fim do theorema do capitulo egundo. "*C´est â quoi je crois être parvenu*, etc." *je rois* diz d´Alembert. Assim no que tenho dicto, não ritico; justifico-me; ou antes posso ter o gôsto de rer, que até nesses mesmos pontos na realidade me ão desvio de tão grande mestre.

De uma mechanica tal como a que tenho elineado, se pode apoderar a physica, emonstrando que nos corpos naturaes se observam ao menos proximamente) as mesmas leis a que se upposeram sujeitos os corpos mathematicos. orém, ainda que se tem escripto e trabalhado anto em physica experimental, não sei que haja inda tudo o que para isto se requer. Falta a emonstração da hypothese terceira. (As lições do bade Nollet sobre esta materia são mperfeitissimas.) Na obra do sabio Gravesande em uma machina composta de tres pendulos, com ue a pretende demonstrar porém funda-se em um

principio, do qual da uma demonstração mathematica errada; principio, cuja demonstração mathematica depende da dicta hypothese terceira.- O principio de que fallo é, que *um corpo grave cahindo de eguaes alturas, seja qual for a linha que descreve, com tanto que não seja angulosa, adquire eguaes velocidades*. Diz elle, que isto succede assim porque também assim succede na queda dos graves por cima de planos diversamente inclinados; no que bem se sabe, se enganou, e cuido que depois d´elle o não menos estimavel Muschembroeck. Esta falta, porém, facilmente se pode remediar, deixando cahir de alturas eguaes sobre substancias molles, hora verticalmente, hora em arco de circulo, como pendulo, um mesmo corpo espherico, procurando sempre, que fira perpendicularmente a superficie da substancia mole, pois fará eguaes cavidades. Seria bom que não restassem mais difficuldades; mas ainda, cuido, que restam. Eu nunca vi a machina de M. ´s Gravesande senão estampada; mas receio que nella nao seriam as experiencias sufficientemente exactas; pelo muito que me parece difficultoso na praxe, que as duas espheras firam a terceira em um mesmo instante, pois que a ferir mais tarde já lhe communica movimento diverso do que devêra; e parece-me que de similhantes differenças não podem deixar de resultar grandes irregularidades. Estimarei muito enganar-me.

Não seria melhor substituir ás duas primeiras espheras por dois martellos, não cylindricos, como os do abbade Nollet, mas parallelipipedos, para mais segurança, para ferirem a terceira esphera sempre (ou mais tarde ou mais cedo) quasi da mesma sorte? Sendo antes pequenas do que grandes as velocidades communicadas, e o pendulo bem comprido, poderão medir-se com facilidade os arcos que descreve ferido, ora por um martello, ora pelo outro ora pelos dois a um tempo.

A maior parte dos auctores incluem a segunda hypothese e a terceira em uma so proposição. Serve-lhes para isto a palavra *potencia*, com a qual (confusissimamente entendida) designam indifferentemente a acceleração e a velocidade constante; confundindo assim dois casos tão diversos.

Só o catalogo dos erros que tem introduzido nas sciencias, a que chamam por excellencia exactas, a metaphysica poetica, encheria volumes.-O costume, digo de substancializar as palavras velocidade, movimento, força, acção, resistencia, pressão, percursão, potencia, etc. da mesma sorte que os poetas personalizam a virtude, o vicio, o amor, a inveja, o somno, etc. - Por isso não serão talvez desnecessarias algumas reflexões mais sobre os principios que proponho.

1º Chamo a

$$\frac{de}{dt}$$

velocidade; a

$$\frac{dv}{dt}$$

acceleração. Vulgarmente dizem que a velocidade é como

$$\frac{de}{dt}$$

e que a força acceleratriz é como

$$\frac{dv}{dt}$$

Explicando-se d´este modo, ou suppoem, ou induzem o leitor a suppôr a existencia de uns entes fantasticos; de uns entes, que ainda a serem reaes, não somente seria difficultosissimo o concebel-os mas totalmente inutil na mechanica o consideral-os. Totalmente inutil, pois sem os considerar se resolvem todos os problemas que é dado ao homem podêr resolver.

2º Excusam-se assim as ordinarias interpretações das expressões,

$$c=\frac{de}{dt}, f=\frac{dv}{dt}$$

interpretações não menos difficeis aos auctores que aos principiantes.

3º Assim como se chamou

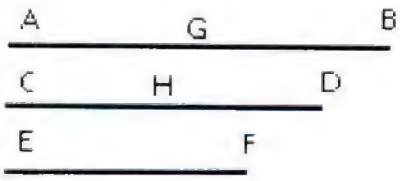
$$\frac{de}{dt}$$

velocidade, podia-se-lhe chamar outro qualquer nome. E assim como se chamou velocidade a

$$\frac{de}{dt}$$

podia-se chamar velocidade a qualquer outra funcção de *de* e *dt*. Tudo isso, não por outra razão, senão porque o mesmo homem que se chama Pedro, podia chamar-se Marmaduk.

Talvez será necessario expôr isto mais por extenso aos principiantes.



Descreva um movel A a linha infinita AB, e outro C a linha infinita CD. Sejam os pontos A e C dados, e gastem ambos os moveis o mesmo tempo EF em descrever, um o espaço AG, outro o espaço CH; e seja AG>CH. Dizem todos, e o mesmo vulgo, que o movel A correu mais, ou que andou mais deppressa, ou que é mais veloz, ou que tem maior velocidade. Assim conforme a linguagem vulgar, tem maior velocidade aquelle movel, que descreve maior espaço em egual tempo. Semelhantemente se acha, que segundo a linguagem vulgar, é mais veloz aquelle movel que descreve maior espaço em menos tempo.

Porém o mechanico reflectindo um pouco nestas expressões não pode deixar de as achar vagas, e insufficientes para o que elle pretende. O que elle pretende é estabeler methodos seguros e geraes para determinar as relações que ha entre espaços descriptos em certos tempos ou entre os tempos, em que se descreveram certos espaços, e qualquer d'aquellas expressões por quadrar uma infinidade de casos diversos, deixaria os problemas indeterminados. E isto por duas razões: 1º por que ainda que seja AG>CH, pode o movel A ter descripto alguma porção de AG menor que a porção que no mesmo tempo descreve C em CD; e nesses logares seria C o mais veloz; e isto por infinitos modos: 2º porque tambem são infinitos os modos porque pode ser AG>CH.

Remedea-se tudo isto com a definição V: mas esta definição podia ser diversa, e ter o mesmo prestimo, pelo que toca a precisão do calculo. Ponhamos v.g.

$$v=\frac{dt}{de}:$$

expressão.bem diversa que offerece a definição V, e bem diversa da da lingua vulgar; pois conforme esta expressão seria necessario dizer que quanto maior é o tempo em que um movel descreve um espaço dado, maior é a sua velocidade. Porém que importa? Quando, conformando-me á nova definição digo que a velocidade de um movel é dupla da do outro, denoto o mesmo que denotaria conformando-me á definição V, quando dicesse, que a velocidade do primeiro é metade da do segundo; por ser

$$\frac{de}{dt}$$

o inverso de

$$\frac{dt}{de}$$

Para denotar a propriedade dos corpos graves, em vez de dizer que a velocidade é directamente como o tempo, teria de dizer, que é inversamente como o tempo. Da mesma sorte podiamos pôr

$$v=\frac{d^m e}{d^n t}$$

ou

$$v=a\frac{d^m e}{d^n t}+b\frac{d^p e}{d^p t}$$

ou

$$v=a\ sen\frac{d^m e}{d^n t}$$

ou

$$v=a\ log\frac{d^m e}{d^n t}$$

etc. etc. Da mesma sorte que podiamos inventar novos nomes para as côres, para os vestidos, etc. etc

E o mesmo discurso convem ás definições da acceleração, da quantidade de movimento, etc. etc.

4º Fica desnecessaria a trabalhosa e escholastica distincção entre velocidade actual, e velocidade potencial. - É verdade que velocidade variavel, quantidade variavel, tomando-se estas palavras no sentido litteral é absurdo: porém não é assim que se devem entender: devem entender-se como vem explicado na definição I do *Ensaio*[1] *sobre os Principios do calculo fluxionario*

5º Não menos desnecessária fica a indagação, e a consideração dos valores, ou das proporções do que chamam causas. Nas hypotheses II e III muito de proposito evito a palavra *causa*, e digo antes *motivo ou razão*; por me parecer que estas ainda conservam intacta a sua vulgar significação, que neste caso é só a segura: pois a da outra, adulterada pelos philosophos, tem-se feito um dos mais fecundos mananciaes de confusão, equivocos e contendas.

Eu tomo sempre as palavras *motivo*, *razão* ou *causa* no sentido mais popular. O homem geralmente depois de observar sufficientes vezes (isto é, tantas quantas á sua natureza competem) que a repetição de certo phenomeno é sempre acompanhada da repetição de outro certo phenomeno, chama ao primeiro, causa do segundo, e ao segundo, effeito do primeiro; e é de facto, que fica persuadido de que sempre ao primeiro ha de

acompanhar o segundo, excepto no conflicto de outro phenomeno, que seja incompatível com aquella causa ou com aquelle effeito. Nada mais necessita nem póde saber o mechanico sobre este ponto. Se aquella *conjuncção* (tanto a passada, que observou, como a futura que admitte) procede de *connexão*, ou se succede, como a harmonia prestabilita de Leibnitz?

Se se deriva necessariamente da natureza dos phenomenos *conjunctos*, ou se poderia haver outras *conjunções* diversas? - Que homem o sabe? Porém tambem que necessidade tem o mechanico de o saber?
E não só o mechanico puramente mathematico, mas tambem o physico.

A sua natureza e a experiencia o forçam a crer, v.g., que qualquer corpo, como os que conhece, desce, quando não acha embaraço, descrevendo 15 pés no primeiro 1" perto da superficie da terra; e que na distancia em que está a lua descreveria 15 pés no primeiro 1'. Isto mesmo denota, conforme a linguagem mais vulgar; dizendo, v.g. que a vizinhança da superficie da terra é a causa, motivo ou razão por que um corpo grave descreve 15 pés em o primeiro 1"; que a distancia de 60 semidiametros da terra é a causa, motivo ou razão, por que um corpo grave descreve 15 pés no primeiro 1". Crê da mesma sorte que ao phenomeno denotado pela palavra impulso, ou golpe, se segue movimento uniforme: ensina-lhe tambem a experiencia que ao phenomeno denotado pela palavra pressão se segue movimento similhante ao dos corpos graves. Que mais lhe é necessário? Se um corpo recebe dois golpes ao mesmo tempo diversamente dirigidos, é motivo de duas velocidades constantes em direcções diversas: se um corpo grave recebe, ou no principio ou em qualquer outro instante da sua queda, um golpe em direcção não vertical, ha um motivo para que o corpo descreva accelleradamente uma recta, e outro motivo para que descreva outra uniformemente: em qualquer d'estes casos, ou em qualquer outro semelhante póde derivar das hypotheses II e II confirmadas pela experiencia, o que deve succeder: e escusa de martyrisar o cerebro (e martyrisal-o debalde) com a indagação, comtemplação, etc, do que chamam causas *efficientes*, *producentes*, *occasionaes*, etc. etc.
6º D'este modo não poderão achar logar na verdadeira e sã mechanica, ou puramente mathematica, ou tambem physica, a questão Leibnitziana sobre as forças vivas e mortas; a questão Bernouilliana sobre a equação $fdt = dv$, etc. etc. Ficam naturalmente de fóra.

---

[1] Esta obra não existe. A definição I do livro XV dos Princ. Math. do mesmo auctor é a seguinte: "Se uma expressão admittir mais de um valor, quando outra expressão admitte um só, chamar-se-ha esta constante e aquella variavel" (Not. do E.)

INICIATIVA · EXPERIÊNCIA · PARTICIPAÇÃO

- **Financiamento de projectos de investimento no sector produtivo;**
- **Concessão de crédito a médio, longo e curto prazo;**
- **Crédito à produção e à venda a prazo;**
- **Crédito à Exportação de bens de equipamento e serviços;**
- **Operações nos mercados financeiros estrangeiros, à vista ou a prazo;**
- **Linhas de crédito para importação de bens de equipamento e serviços;**
- **Prestação de garantias bancárias;**
- **Apoio à concepção e realização de operações nos mercados financeiros, nomeadamente nas Bolsas de Valores;**
- **Assistência na preparação e avaliação de projectos de investimento, incluindo a organização dos respectivos financiamentos, de origem nacional ou estrangeira *(engenharia financeira);***
- **Apoio à realização de "joint-ventures";**
- **Promoção de missões empresariais em Portugal e no estrangeiro;**
- **Apoio aos aforradores no sentido do encaminhamento das poupanças para o investimento produtivo.**

Iniciativa nas áreas mais diferenciadas da economia portuguesa.
Experiência em actividades relevantes para o desenvolvimento do País.
Participação em projectos determinantes para o futuro.

Banco de Fomento Nacional

EFACEC sistemas electromecânicos

a força de uma equipa

SISTEMAS electromecânicos industriais

SISTEMAS para a produção, transporte e distribuição de energia eléctrica

SISTEMAS de controle de fluídos

EFACEC Empresa Fabril de Máquinas Eléctricas, s.a.

LISBOA - RUA RODRIGO DA FONSECA, 76-3.º • TELEFONES 530161-563351 • 1200 LISBOA
PORTO - RUA SÁ DA BANDEIRA, 706-5.º • TELEFONE 322014 • 4000 PORTO

EFACEC

NUNCA PARÁMOS

aeist

IST

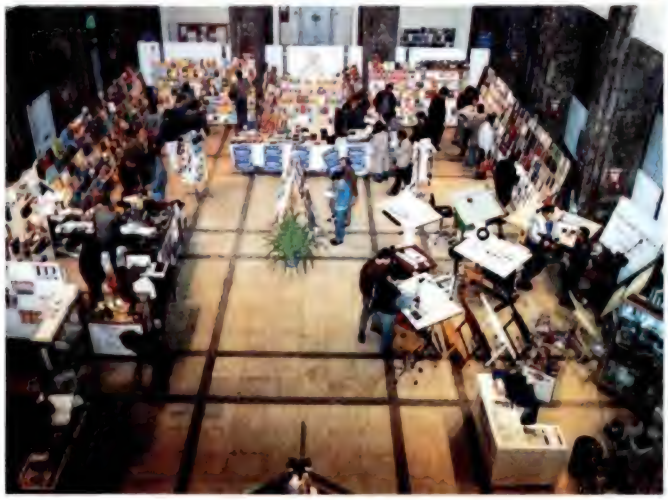
associação de estudantes

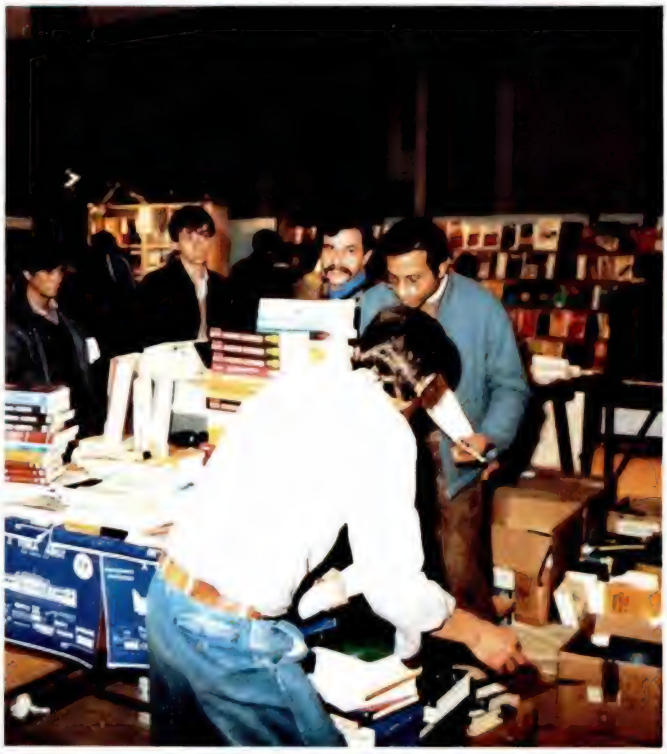
do instituto superior técnico

SERVIÇOS COMERCIAIS: LIVRARIA, PAPELARIA, CENTRO DE CÓPIA

Av. Rovisco Pais 1000 LISBOA

Telefones 88 10 18 — 88 83 23





A ASSOCIAÇÃO DE ESTUDANTES DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO TEM DESDE HÁ CINCO ANOS REALIZADO FEIRAS DO LIVRO, MATERIAL DE DESENHO TÉCNICO E INFORMÁTICO. O ENORME SUCESSO E A EXCELENTE ACEITAÇÃO DESTE CERTAME, PELA PARTE DE TODA A POPULAÇÃO DO INSTITUTO, (CERCA DE 1 000 PROFESSORES E 6 500 ALUNOS), E DAS GRANDES EDITORAS / DISTRIBUIDORAS E MARCAS, OBRIGAM-NOS CADA VEZ MAIS A APERFEIÇOAR E ALARGAR O ÂMBITO DESTES EVENTOS. NESTE SENTIDO A AEIST REALIZOU A X FEIRA DE 2 A 5 DE NOVEMBRO E DE QUE AS FOTOGRAFIAS ACIMA MOSTRAM, ALGUNS DOS ASPECTOS MAIS RELEVANTES

UMA INTRODUÇÃO À AXIOMÁTICA DA TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES DE J. SEBASTIÃO E SILVA

J. Campos Ferreira

Embora, como é natural, tenha havido um grande número de trabalhos, de diversos autores, com ideias que podem considerar-se percursoras da teoria das distribuições, a contribuição fundamental para a criação desta teoria ficou a dever-se ao matemático francês Laurent Schwartz; o seu tratado intitulado "Théorie des distributions", publicado em primeira edição pela Hermann & Cie em 1950 e 1951 (volumes 1091 e 1122 das "Actualités scientifiques et industrielles") constitui uma sistematização admirável da teoria.

Entre os cientistas que participaram, posteriormente, no desenvolvimento do tema e no enriquecimento das suas aplicações destaca-se, pela importância das suas contribuições originais, o matemático português José Sebastião e Silva.

Neste artigo descreve-se de forma tão elementar quanto possível a axiomática das distribuição de Sebastião e Silva (para o caso das distribuições de ordem finita, definidas em $\mathbb{R}$); indica-se ainda um modelo muito natural dessa axiomática, também devido a Sebastião e Silva e, visando proporcionar ao leitor algum contacto com as distribuições, estabelecem-se, em casos particulares escolhidos pela sua simplicidade, algumas "fórmulas de Dirac".

1. CONCEPÇÃO INTUITIVA DAS DISTRIBUIÇÕES COMO DERIVADAS GENERALIZADAS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

Sem grande preocupação de rigor pode dizer-se que o conceito de distribuição generaliza o de função, tendo essa generalização por objectivo garantir a possibilidade de efectuar a operação de derivação em muitos casos em que não era possível fazê-lo na Análise clássica.

Em particular, qualquer função contínua definida em R tem, na teoria das distribuições, derivadas de todas as ordens, todas elas também definidas em R (enquanto, como é bem sabido, do ponto de vista clássico há funções contínuas que não são diferenciáveis em alguns pontos, e até mesmo que o não são em nenhum).

Naturalmente, na nova teoria as derivadas das funções contínuas em R não são em geral funções, mas distribuições; também o conceito de derivada não é o usual, mas sim, um conceito generalizado. Finalmente, a expressão "estar definida em" é também utilizada numa acepção distinta da habitual; com efeito, contrariamente ao que se passa com as funções, uma distribuição definida em R não assume em geral um valor em cada ponto $\in$ R: só em casos particulares é possível definir o conceito de valor de uma distribuição num ponto do seu domínio.

Já referimos que o principal objectivo da criação das distribuições é o de tornar possível em condições mais gerais a operações de derivação. Vem a propósito recordar que o desejo de negar impossibilidades, de tornar possível o que o não era mediante a criação de novos entes, é desde sempre uma das características fundamentais da Matemática.

Por exemplo, foi esse desejo que presidiu às extensões do conceito de número: passou-se do conjunto dos naturais, N, para o dos inteiros Z, para tornar sempre possível a subtracção; e do dos inteiros para o dos racionais, Q, para tornar a divisão (quase) sempre possível. A criação dos irracionais teve em vista garantir a possibilidade de passar ao limite em casos em que não era possível fazê-lo em Q (não para todas as sucessões, naturalmente, mas para todas aquelas que, por assim dizer, tinham alguma possibilidade de "vir a ser" convergentes, isto é, para as sucessões de Cauchy); é ainda a pretensão de negar a impossibilidade de resolução de equações algébricas que conduz à criação do conjunto dos complexos, C.

Feitas estas observações, convencionemos designar por $\mathscr{C}(R)$ — ou apenas por $\mathscr{C}$, se não houver risco de confusão — o conjunto de todas as funções complexas definidas e contínuas em $R^{(1)}$ e comecemos por observar que, tal como em N a subtracção não é sempre possível, mas é-o sempre a adição (ou como em Z a divisão nem sempre é possível mas sempre o é a multiplicação) também em $\mathscr{C}$ nem sempre pode efectuar-se a derivação, mas é sempre possível a primitivação. Com efeito, dada arbitrariamente uma função $F \in \mathscr{C}$, existem sempre primitivas de F: para obter uma delas, G, basta pôr:

$$G(x) = \int_a^x F(t)\,dt \quad (x \in R),$$

Original recebido para publicação em 16/10/86.

BIBLIOTECA DO INSTITUTO TÉCNICO

onde a é um número real arbitrário.

Na sequência designaremos por $\mathfrak{I}F$, para cada $F \in \mathscr{C}$, a primitiva de F que é nula no ponto 0, isto é, a função definida em R pela fórmula:

$$\mathfrak{I}F(x) = \int_0^x F(t)dt$$

As primitivas de F serão as funções da forma $\mathfrak{I}F + c$, com c constante (complexa) arbitrária. Designando por $\mathscr{C}^1$ o conjunto das funções continuamente deriváveis em R, ter-se-á:

$$\mathscr{C}^1 = \{\mathfrak{I}F + c : F \in \mathscr{C}, c \in C\},$$

verificando-se, evidentemente, a inclusão $\mathscr{C}^1 \subset \mathscr{C}$.

Mais geralmente, definindo as potências do "operador" $\mathfrak{I}$ por meio das fórmulas:

$$\mathfrak{I}^0F = F, \qquad \mathfrak{I}^nF = \mathfrak{I}(\mathfrak{I}^{n-1} F) \qquad (F \in \mathscr{C}, n \in N)$$

e designando por P_n o conjunto dos polinómios (definidos em R, de coeficientes complexos) de grau menor do que n, verificar-se-á a igualdade:

$$\mathscr{C}^n = \{\mathfrak{I}^nF + p : F \in \mathscr{C}, p \in P_n\},$$

onde $\mathscr{C}^n$ designa o conjunto das funções n vezes continuamente deriváveis em R.

Pondo ainda:

$$\mathscr{C}^\infty = \bigcap_{n \in N} \mathscr{C}^n,$$

ter-se-á, para cada $n \in N$:

$$\mathscr{C}_\infty \subset \ldots \subset \mathscr{C}^{n+1} \subset \mathscr{C}^n \subset \ldots \subset \mathscr{C}^1 \subset \mathscr{C}.$$

Para qualquer $n \in N$, a derivação poderá ser encarada com uma aplicação (sobrejectiva, não injectiva) de $\mathscr{C}^{n+1}$ em $\mathscr{C}^n$ (ou de $\mathscr{C}_\infty$ em si mesmo). Por outro lado, se considerarmos em $\mathscr{C}$ a sua estrutura usual de espaço vectorial complexo, cada um dos espaços $\mathscr{C}^n$ (com $n \in N$ ou $n = \infty$) será um subespaço vectorial de $\mathscr{C}$ e a derivação será uma aplicação linear de $\mathscr{C}^{n+1}$ em $\mathscr{C}^n$ (ou de $\mathscr{C}_\infty$ em si mesmo), tendo por núcleo o conjunto P_1 das funções constantes.

O nosso principal objectivo na sequência é o de estender a precedente cadeia de espaços no sentido oposto, por forma a obter outra cadeia da forma:

$$\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{C}_n \subset \mathscr{C}_{n+1} \subset \ldots \subset \mathscr{C}_\infty,$$

onde — por agora apenas intuitivamente — $\mathscr{C}_1$ designará o conjunto das primeiras derivadas (generalizadas) das funções $F \in \mathscr{C}$ e, em geral, $\mathscr{C}_n$ o conjunto das derivadas de ordem n das mesmas funções. Finalmente

$$\mathscr{C}_\infty = \bigcup_{n \in N} \mathscr{C}^n,$$

será o conjunto de todas as distribuições.

A formulação rigorosa destas ideias constituirá o objectivo do §3, no qual será descrita a axiomática de Sebastião e Silva. Antes, porém, no §2, daremos em termos intuitivos alguns exemplos de distribuições que não são funções ordinárias[2] e utilizá-los-emos para introduzir algumas fórmulas importantes, que adiante serão estabelecidas de forma rigorosa.

2. PRIMEIRAS REFERÊNCIAS ÀS "FUNÇÕES" E FÓRMULAS DE DIRAC

Imaginemos um ponto que se desloque sobre uma recta de tal modo que, fixado um referencial, a abcissa x do ponto seja nula em qualquer instante $t \leqslant 0$ e igual a t sempre que seja $t>0$ (assim, o ponto terá estado em repouso até à origem dos tempos, começando nesse instante a deslocar-se com movimento uniforme, de velocidade unitária). O movimento ficará então inteiramente determinado pela fórmula $x = J(t)$, onde

$$J(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leqslant 0 \\ t & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

J é uma função contínua em R que, no sentido clássico, tem derivadas de todas as ordens definidas em $R \setminus \{0\}$; as duas primeiras são:

$$J'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leqslant 0 \\ t & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

e $J''(t) = 0$ $(t \neq 0)$. Nos pontos em que está definida, J' determina a velocidade do movimento, J'' a aceleração (podendo observar-se que, embora a aceleração não tome qualquer valor não nulo, a velocidade não é constante).

No sentido da teoria das distribuições as derivadas de J serão distribuições definidas em R, sendo usual designar a primeira por Y, a segunda por δ, a terceira

(1) Como é sabido, uma função complexa F definida em R pode sempre decompôr-se numa soma $F_1 + iF_2$, onde F_1 e F_2 são funções reais definidas em R. F é contínua sse F_1 e F_2 o são e é n vezes continuamente derivável (ou de classe $\mathscr{C}^n$) sse cada uma das funções F_1 e F_2 o fôr. Sendo $a, b \in R$, o integral $\int_a^b F(t)\,dt$ existe sse existirem $\int_a^b F_1(t)\,dt$ e $\int_a^b F_2(t)\,dt$, sendo então verificada a igualdade:

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b F_1(t)\,dt + i \int_a^b F_2(t)\,dt;$$

(sse é abreviatura de "se e só se").

(2) A expressão **funções generalizadas** é também usada para designar as distribuições e outros objectos matemáticos cuja consideração envolve de algum modo uma generalização do conceito usual de função.

por δ', etc. Utilizando o símbolo D para designar a derivação generalizada (isto é, no sentido das distribuições), e definindo as potências deste operador do modo habitual, poderá então escrever-se:

$$DJ = Y\,,\ D^2J = \delta\,,\ D^3J = \delta'\,,\ldots$$

As derivadas de J não são funções, mas distribuições e, embora se considerem definidas em R, nenhuma delas tem valor no ponto 0.

Sendo a um número real qualquer, poderemos considerar, em lugar das derivadas da função J, as da função que dela se obtém por "translacção de amplitude a":

$$J_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant a \\ x-a & \text{se } x>a. \end{cases}$$

Usaremos, para designar essas derivadas, os símbolos Y_a, δ_a, δ'_a, etc.:

$$DJ_a = Y_a\,,\ D^2J_a = \delta_a\,,\ D^3J_a = \delta'_a\,,\ldots$$

Y_a é a *distribuição de Heaviside* no ponto a, δ_a a *distribuição de Dirac* no mesmo ponto (no caso a = 0, as notações Y_o, δ_o,... simplificam-se para Y, δ,...).

Convém observar que a distribuição δ_a era encarada por Dirac como uma função, uma espécie de "contrapartida contínua" do δ de Kronecker que, para o efeito em vista, poderá aqui ser introduzido do modo seguinte: para cada $p \in N$ convencionemos designar por δ_p a sucessão cujo termo de ordem n, $\delta_p(n)$, é igual a 1 ou a 0 consoante $n = p$ ou $n \neq p$. Reconhece-se imediatamente que, qualquer que seja p:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_p(n) = 1$$

e também que se u(n) é o termo de ordem n de uma sucessão arbitrária de termos complexos, se tem, para quaisquer valores de n e p:

$$u(n)\ \delta_p(n) = u(p)\ \delta_p(n).$$

Desta igualdade, atendendo a que:

$$u(p) = u(p) \sum_{n=1}^{\infty} \delta_p(n) = \sum_{n=1}^{\infty} u(p)\ \delta_p(n)\,,$$

deduz-se imediatamente

$$u(p) = \sum_{n=1}^{\infty} u(n)\ \delta_p(n).$$

De modo análogo, Dirac admitiu que a sua "função" $\delta(x)$ verificaria as condições (obtidas das fórmulas precedentes por natural "passagem do discreto ao contínuo"):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\,dx = 1\,,\ \text{para qualquer } a \in R;$$

$$\varphi(x)\,\delta_a(x) = \varphi(a)\,\delta_a(x) \quad \text{e} \quad \varphi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\delta_a(x)\,dx\,,$$

para qualquer função $\varphi : R \to C$, suficientemente "bem comportada".

Dirac atribuiu à função δ_a o valor 0 em qualquer ponto distinto de a e, no ponto a —— atendendo a que qualquer valor finito seria incompatível com a condição $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\,dx = 1$ — o valor $+\infty$.

Em princípio nada haverá a objectar a uma tal definição da função δ_a: a consideração de funções com valores infinitos era já corrente em alguns ramos da Matemática, designadamente na teoria da medida. Porém, se fosse:

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq a \\ +\infty & \text{se } x = a\,, \end{cases}$$

devia ser também, de acordo com as definições usuais das operações em que intervem o símbolo ∞, $2\delta_a = \delta_a$ e, portanto, (a menos que a consideração de valores infinitos obrigasse a abandonar as mais elementares propriedades do integral):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\,\delta_a(x)\,dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\,dx\,,$$

igualdade que estaria em contradição evidente com a condição $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\,dx = 1$, que se pretendia fosse verificada. Algo estaria, portanto, incorrecto nas conjecturas de Dirac, o que era lastimável porque, utilizando δ_a e as suas derivadas, apesar da natureza contraditória de tais "funções", Dirac pudera obter resultados da maior importância.

Na sequência, depois da estruturação axiomática das distribuições, teremos oportunidade de verificar que, mediante a introdução de algumas definições simples e naturais, todas as conjecturas acabadas de mencionar se revelarão correctas (excepto a que corresponde a considerar δ_a como uma função, atribuindo-lhe, portanto, um valor em cada ponto $x \in R$). Ficarão assim, sanadas todas as contradições, podendo observar-se que o desenvolvimento das ideias adiante expostas conduz a uma teoria matemática nova e poderosa, de grande beleza e com aplicações do maior interesse em múltiplos domínios.

3. A AXIOMÁTICA DE J. SEBASTIÃO E SILVA

Nos cursos de Análise matemática em que a teoria é baseada numa introdução dos números reais por via axiomática, ao estabelecer os axiomas dos reais aceita-se, em geral, como previamente conhecidos alguns elementos da teoria dos conjuntos. De modo análogo, ao formular a axiomática das distribuições, suporemos que o leitor tem já conhecimento, não só de elementos da teoria dos conjuntos, como também de alguns conceitos fundamentais da Análise clássica, tais como o de função contínua e de derivada (na acepção usual); em particular, suporemos claramente fixado antes da introdução da axiomática o significado dos símbolos $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}^n$ (com $n \in N$), mas não evidentemente, o de símbolos do tipo $\mathscr{C}_n$, $\mathscr{C}_\infty$.

Contém a axiomática dois termos primitivos: *distribuição* e *derivação* (generalizada). Naturalmente, o significado destes termos deve, de início supor-se completamente indeterminado; ele irá sendo progressivamente esclarecido e precisado à medida que vão sendo estabelecidos os axiomas da teoria.

Enunciamos agora os quatro axiomas que utilizaremos para de certo modo caracterizar as distribuições definidas em R; porém, em lugar de enunciá-los ininterruptamente, intercalaremos, por vezes, entre dois axiomas consecutivos alguns comentários destinados a motivar e a tornar mais natural o seu significado.

Ax. 1. *As distribuições definidas em* R *formam um conjunto — que designaremos por* $\mathscr{C}_\infty$ (R) *ou apenas* $\mathscr{C}_\infty$ *— que contém o conjunto das funções contínuas* $\mathscr{C}$.

Tem-se assim, como era de esperar, $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_\infty$: qualquer função contínua é uma distribuição.

Ax. 2. *A derivação é uma aplicação de* $\mathscr{C}_\infty$ em $\mathscr{C}_\infty$ *— aplicação que designaremos pelo símbolo* D *— verificando a condição seguinte: sempre que uma distribuição* f *pertença ao conjunto* $\mathscr{C}^1$, *isto é, seja uma função continuamente derivável em R, ter-se-á* Df = f' (*onde* f' *designa a função contínua em* R *que é derivada usual de* f).

Convém observar já que, se definirmos como é usual a potência D^n de D, qualquer símbolo da forma $D^n F$, com $F \in C$ e $n \in N_0 = N \cup \{0\}$, representará uma distribuição; é o que imediatamente se deduz dos axiomas 1 e 2 (e o que teria de verificar-se se, como pretendemos, qualquer função contínua em R tiver derivadas de todas as ordens na nova teoria). Pode assim, considerar-se definida uma aplicação de $\mathscr{C} \times N_0$ em $\mathscr{C}_\infty$, fazendo corresponder ao par $(F,n) \in \mathscr{C} \times N_0$ a distribuição $D^n F$.

O axioma seguinte exprime precisamente que esta aplicação é sobrejectiva; assim, de certo modo, esse axioma traduz uma exigência de "economia": não há mais distribuições[3] do que as necessárias para assegurar a existência de derivadas de todas as ordens para qualquer função $F \in \mathscr{C}$.

Ax. 3. *Qualquer que seja* $f \in \mathscr{C}_\infty$, existem $F \in \mathscr{C}$ e $n \in N_0$ *tais que* $f = D^n F$.

Para esclarecer as relações entre os objectos a que chamamos distribuições e os símbolos da forma $D^n F$, ou melhor os pares $(F,n) \in \mathscr{C} \times N_0$, falta apenas indicar quando é que dois elementos de $\mathscr{C} \times N_0$ representam a mesma distribuição (é óbvio que a aplicação de $\mathscr{C} \times N_0$ em $\mathscr{C}_\infty$ atrás referida não é injectiva: por exemplo, se for $F(x) = x^3$, deverá ter-se, pelos axiomas 1 e 2, $D^2F = DF' = F''$, isto é, os pares (F, 2), (F', 1) e (F'', 0) terão de corresponder a uma mesma distribuição).

Convém neste momento chamar a atenção para a analogia desta situação com a que se nos depara, em fase semelhante, quando tratamos de definir o conceito de número racional (suposto já organizado o conjunto Z). Intuitivamente, é-se levado a conceber cada racional como um quociente $\frac{p}{q}$ (de um inteiro p por um natural q), mas é claro que em geral tais "quocientes" não têm qualquer sentido antes da estruturação do conjunto Q.

É então natural pensar, em lugar de quocientes, em pares ordenados $(p,q) \in Z \times N$, que já têm um sentido preciso. Pretende-se, naturalmente, que cada um destes pares determine um número racional, mas também aqui dois pares distintos podem determinar o mesmo elemento de Q (por exemplo, os racionais correspondentes aos pares (1, 3) e (2, 6) — ou, se se preferir, aos "quocientes" $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ — deverão de algum modo ser identificados).

Que condição devem verificar dois pares (p, q) e (r, s) para que correspondam a um mesmo racional? Tal condição não pode, por agora, ser expressa na forma $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ — carente de sentido, em geral, no conjunto Z — mas pode sê-lo pela igualdade ps = qr, que determina uma relação de equivalência em $Z \times N$. Os números racionais podem, então, ser formalmente definidos como classes de equivalência para essa relação, introduzindo-se depois facilmente as operações algébricas e a relação de ordem usuais no conjunto Q. É claro, que, na prática, quando se usam os racionais, nunca se encaram como classes de equivalência: o que interessa então não é a natureza desses números, mas as regras formais com que com eles se opera, as "regras do jogo", expressas em definições apropriadas.

---

[3] É importante assinalar que, numa teoria mais geral, o axioma 3 não é verificado: há nessa teoria distribuições — ditas de ordem infinita ou de grau infinito — que não são representáveis na forma $D^n F$, com $F \in \mathscr{C}$ e $n \in N_0$.

Agora também, no caso da axiomática das distribuições, é necessário fixar a relação que deve verificar-se entre dois pares quaisquer (F,m), (G,n) $\in \mathscr{C} \times N_0$ para que eles determinem a mesma distribuição. Essa relação não poderá ser expressa pela igualdade $D^m F = D^n G$, geralmente desprovida de sentido antes da estruturação das distribuições: porém, em lugar de se pensar em derivar as funções F e G, será natural procurar obter o resultado pretendido recorrendo à primitivação, sempre possível, mesmo no quadro clássico.

Para esclarecer as ideias convirá, como de costume, começar pelos casos mais simples: por exemplo, quando deverá verificar-se a igualdade DF = DG ou, equivalentemente, quando deverão ser identificados os pares (F, 1) e (G, 1)? No caso particular de F e G pertencerem a $\mathscr{C}^1$ a resposta é imediata. Com efeito, nessa hipótese ter-se-á, pelo axioma 2, DF = F' e DG = G' (sendo F' e G' as derivadas usuais de F e G) e portanto, a igualdade DF = DG será equivalente a (F–G)' = 0 e verificar-se-á se a função F – G for constante em R.

Nada mais natural do que aceitar que isto mesmo deverá passar-se para que seja DF = DG, no caso de F e G serem, não necessariamente funções de classe $\mathscr{C}^1$, mas elementos arbitrários de $\mathscr{C}$. Mais geralmente, reconhece-se sem dificuldade que, se for $r \in N$ e F, $G \in \mathscr{C}^r$, se terá $D^r F = D^r G$ sse $F - G \in P_r$. Torna-se, assim, natural admitir, como último axioma da nossa teoria, o

Ax. 4 — *Sendo* F, $G \in \mathscr{C}$ *e* $r \in N$, *a igualdade* $D^r F = D^r G$ *é verificada sse* $F - G \in P_r$.

É agora fácil determinar em que condições se verificará a igualdade $D^m F = D^n G$, com m, $n \in N_0$ e F, $G \in \mathscr{C}$. Para tal, comecemos por observar que, sempre que $F \in \mathscr{C}$ (e, portanto, $\mathfrak{J}F \in \mathscr{C}^1$) deve ter-se $D(\mathfrak{J}F) = (\mathfrak{J}F)' = F$; mais geralmente, para qualquer natural p ter-se-á, na mesma hipótese, $D^p(\mathfrak{J}^p F) = F$.

Daqui decorre imediatamente a possibilidade de exprimir como derivadas de uma mesma ordem de funções contínuas duas distribuições arbitrárias, $D^m F$ e $D^n G$; basta observar que

$$D^m F = D^m(D^n \mathfrak{J}^n F) = D^{m+n}(\mathfrak{J}^n F),$$
$$D^n G = D^n(D^m \mathfrak{J}^m G) = D^{m+n}(\mathfrak{J}^m G).$$

Do axioma 4 decorre agora que a igualdade $D^m F = D^n G$ será verificada se e só se for $\mathfrak{J}^n F - \mathfrak{J}^m G \in P_{m+n}$.

Formalizada nestes termos a axiomática, levanta-se, naturalmente, em primeiro lugar a questão seguinte: poderá admitir-se a existência de distribuições (isto é, de objectos matemáticos que verifiquem os axiomas 1 a 4) sem o receio de que a admissão dessa existência possa introduzir alguma contradição na teoria matemática que estamos a desenvolver?

Para provar que esta questão tem resposta afirmativa, isto é, para provar a *compatibilidade* da axiomática, o que convém é construir-lhe um *modelo*, definindo de forma rigorosa um conjunto (a cujos elementos iremos chamar *distribuições*) e uma aplicação desse conjunto em si mesmo (que será chamada *derivação*), de modo que resultem verificados os quatro axiomas em causa.

Para este efeito, comecemos por provar que a relação ϱ, definida em $\mathscr{C} \times N_0$ pela fórmula:

$$(F,m)\ \varrho\ (G,n) \qquad \mathfrak{J}^n F - \mathfrak{J}^m G \in P_{m+n},$$

é uma relação de equivalência. Sendo evidentes a reflexividade e a simetria, verifiquemos a transitividade.

Supondo satisfeitas as condições (F,m) ϱ (G,n) e (G,n) ϱ (H,p), isto é, supondo que

$$\mathfrak{J}^n F - \mathfrak{J}^m G \in P_{m+n} \text{ e } \mathfrak{J}^p G - \mathfrak{J}^n H \in P_{n+p},$$

ter-se-á (atendendo a que as primitivas de ordem k de um polinómio de grau $< r$ são polinómios de grau $< r + k$)

$$\mathfrak{J}^{n+p} F - \mathfrak{J}^{m+p} G \in P_{m+n+p},\ \mathfrak{J}^{m+p} G - \mathfrak{J}^{m+n} H \in P_{m+n+p}.$$

Destas relações deduz-se imediatamente, por subtracção

$$\mathfrak{J}^{n+p} F - \mathfrak{J}^{m+n} H \in P_{m+n+p}$$

ou, aplicando o operador D^n:

$$\mathfrak{J}^p F - \mathfrak{J}^m H \in P_{m+p},$$

isto é, (F,m) ϱ (H,p).

Fica assim provado que ϱ é uma relação de equivalência.

Convencionemos agora, para cada par (F,m) $\in \mathscr{C} \times N_0$ designar por [F,m] a classe de equivalência segundo ϱ à qual (F,m) pertence; designemos ainda por $\mathscr{C}^*_\infty$ o conjunto de todas as classes de equivalência, isto é, o quociente de $\mathscr{C} \times N_0$ pela relação ϱ:

$$\mathscr{C}^*_\infty = \frac{\mathscr{C} \times N_0}{\varrho} \quad \{[F,m] : F \in \mathscr{C},\ n \in N_0\},$$

com

$$[F,m] = \{ (G,n) \in \mathscr{C} \times N_0 : (G,n)\ \varrho\ (F,m) \}.$$

Por outro lado, para cada $F \in \mathscr{C}$, convencionemos identificar[4] a função F com a classe de equivalência

[4] Identificar dois objectos matemáticos é aceitar que os dois possam ser designados pelo mesmo símbolo. Observe-se que é também necessária uma identificação para que cada número inteiro possa ser considerado como um racional (trata-se então de identificar o inteiro p com a classe de equivalência a que pertence o par (p, 1) $\in Z \times N$).

[F,0]. Verifiquemos por fim que, por meio da fórmula

$$D_*([F,m]) = [F,m+1],$$

se define uma aplicação D_* de $\mathscr{C}^*_\infty$ em si mesmo; basta para tal notar que, se for (F,m) ϱ (G,n), será também (F,m + 1) ϱ (G,n + 1), isto é que, de $\mathfrak{J}^n F - \mathfrak{J}^m G \in P_{m+n}$ se pode deduzir $\mathfrak{J}^{n+1} F - \mathfrak{J}^{m+1} G \in P_{m+n+2}$, o que é evidente (pode até deduzir-se $\mathfrak{J}^{n+1} F - \mathfrak{J}^{m+1} G \in P_{m+n+1}$).

É agora fácil reconhecer que, se nos enunciados dos axiomas 1 a 4 substituirmos $\mathscr{C}_\infty$ por $\mathscr{C}^*_\infty$ e D por D_*, esses axiomas serão verificados.

Para o axioma 1 isso decorre da identificação de $\mathscr{C}$ com uma parte de $\mathscr{C}^*_\infty$ acabada de referir. Completa-se a verificação do axioma 2 notando que, se um elemento de $\mathscr{C}^*_\infty$ se identificar com uma função $F \in \mathscr{C}^1$, esse elemento é [F,0] e, portanto, atendendo a que D_* ([F,0)] = = [F,1] = [F',0], a sua derivada (no sentido de D_*) é idêntica a F', isto é, à sua derivada usual.

É também imediata a verificação do axioma 3: um elemento arbitrário de $\mathscr{C}^*_\infty$, [F,m], pode sempre representar-se na forma $D^m_*([F,T_0]) = D^m_* F$. Finalmente, se se tiver $D^r_* F = D^r_* G$, isto é, [F,r] = [G,r], ter-se-á também $\mathfrak{J}^r F - \mathfrak{J}^r G \in P_{2r}$, e portanto, $F - G \in P_r$, o que confirma a verificação do axioma 4

Fica assim provado que obtivemos de facto um modelo da axiomática o que, em certo sentido, equivale a uma prova de existência das distribuições.

Outra questão importante é a que se refere à "unicidade das distribuições" ou, em termos mais precisos, à *categoricidade* da axiomática. É claro que o modo de formular razoavelmente essa questão não é perguntar se o modelo obtido é o único possível[5], mas sim se qualquer outro lhe será necessariamente *isomorfo*. Noutros termos: se $\mathscr{C}^0_\infty$ for um conjunto e D^0 uma aplicação de $\mathscr{C}^0_\infty$ em si mesmo tais que, substituídos nos lugares de $\mathscr{C}_\infty$ e D, respectivamente, tornem verdadeiros os enunciados dos axiomas 1 a 4, poderá garantir a existência de uma aplicação bijectiva $\varphi : \mathscr{C}^0_\infty \to \mathscr{C}^*_\infty$ que transforme cada elemento de $\mathscr{C}^0_\infty$ que seja uma função contínua nessa mesma função (considerada agora como elemento de $\mathscr{C}^*_\infty$) e respeite a derivação (isto é, verifique a condição $\varphi\,(D_0 f) = D_*\,(\varphi f)$, para cada $f \in \mathscr{C}^0_\infty$?

A resposta a esta questão é afirmativa: para obter uma tal aplicação φ basta, como decerto é já evidente, fazer corresponder a cada distribuição $f = D^m_0 F \in \mathscr{C}^0_\infty$ a classe $[F,m] \in \mathscr{C}^*_\infty$. Pode assim dizer-se que fica assegurada, em certo sentido, a unicidade do conjunto das distribuições e do operador de derivação generalizado.

4. OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS. RETORNO ÀS FÓRMULAS DE DIRAC

Para cada natural n designemos por $\mathscr{C}_n(R)$, ou apenas $\mathscr{C}_n$, o conjunto de todas as distribuições f que verificam a condição seguinte: existe uma função $F \in \mathscr{C}$ tal que $f = D^n F$. A relação $D^n F = D^{n+1}(\mathfrak{J}F)$, válida para qualquer $n \in N$ e qualquer $F \in \mathscr{C}$, mostra que se tem sempre $\mathscr{C}_n \subset \mathscr{C}_{n+1}$. Por outro lado, decorre do axioma 3 que $\bigcup_{n \in N} \mathscr{C}_n = \mathscr{C}_\infty$.

Designaremos por *grau* de uma distribuição f o menor dos inteiros $n \geqslant 0$ tais que $f \in \mathscr{C}_n$; $\mathscr{C}_n$ é assim o conjunto das distribuições de grau $\leqslant n$. As distribuições de grau 0 são as funções contínuas; verifica-se facilmente que a distribuição de Heaviside, Y, a distribuição de Dirac, δ, e a derivada de ordem p de δ (distribuições que agora podem ser rigorosamente definidas pelas fórmulas $Y = DJ$, $\delta = D^2 J$, $\delta^{(p)} = D^{p+2} J$, onde J é a função contínua mencionada no §2) têm respectivamente os graus 1, 2 e p + 2.

Sendo f e g duas distribuições quaisquer, decorre imediatamente de propriedades já referidas a existência de um $n \in N_0$ tal que f e g pertençam ambas ao conjunto $\mathscr{C}_n$ tendo-se, portanto, $f = D^n F$ e $g = D^n G$ com F,, $G \in \mathscr{C}$. É então muito fácil verificar que a distribuição $D^n(F + G)$ depende apenas de f e g (e não de n, F e G, isto é, das representações particulares adoptadas para as distribuições f e g). Com efeito, para qualquer natural $p \geqslant n$, se F^* e G^* forem funções contínuas tais que $f = D^p F^*$ e $g = D^p G^*$, ter-se-á:

$$D^p F^* = D^p(\mathfrak{J}^{p-n} F),\quad D^p G^* = D^p(D^p(\mathfrak{J}^{p-n} G)$$

e, portanto, também:

$$P = F^* - \mathfrak{J}^{p-n} F \in P_p, \qquad Q = G^* - \mathfrak{J}^{p-n} G \in P_p,$$

donde logo decorre:

$$D^p(F^* + G^*) = D^p(\mathfrak{J}^{p-n} F + P + \mathfrak{J}^{p-n} G + Q) =$$
$$= D^p[\mathfrak{J}^{p-n}(F + G)] = D^n(F + G).$$

O processo acabado de descrever permite associar a cada par $(f,g) \in \mathscr{C}^2_\infty$ uma nova distribuição, definindo-se assim uma operação binária em $\mathscr{C}_\infty$; esta operação denomina-se, naturalmente, *adição* e a distribuição desse modo associada ao par (f, g) é, por definição, a *soma* de f e g, f + g.

É fácil também reconhecer que a adição é a única aplicação de $\mathscr{C}^2_\infty$ em $\mathscr{C}_\infty$ que goza das propriedades:

i) *se* $f, g \in \mathscr{C}$, f + g *é a soma usual das funções* f *e* g;
ii) *para quaisquer distribuições* f, g, $D(f + g) = Df + Dg$.

[5] Neste sentido muito restritivo é óbvio que não haveria "unicidade": por exemplo, bastaria repetir todos os passos da construção anterior considerando, em lugar dos pares (F, n), $\mathscr{C} \times N_0$, pares da forma $(n, F) \in N_0 \times \mathscr{C}$, com as adaptações evidentes, para se obter um modelo **distinto** do anterior.

Define-se também de modo imediato o produto de um número $\alpha \in C$ por uma distribuição f: sendo $f = D^n F$ põe-se, naturalmente, $\alpha f = D^n(\alpha F)$, sendo trivial a verificação da coerência desta definição (isto é, a prova de que o produto αf, dependendo naturalmente, de α e f, não depende da representação particular escolhida para a distribuição f). É também evidente que a multiplicação de um número complexo por uma distribuição — isto é, a aplicação $(\alpha, f) \to \alpha f$ acabada de definir — é a única aplicação de $C \times \mathscr{C}_\infty$ em $\mathscr{C}_\infty$ que coincide com a multiplicação usual de um número por uma função no caso de f ser uma função contínua e que, para quaisquer $\alpha \in C$ e $f \in \mathscr{C}_\infty$, satisfaz a condição $D(\alpha f) = \alpha D f$.

Verifica-se ainda sem dificuldade que, munido destas operações de adição e multiplicação por escalares, $\mathscr{C}_\infty$ é um espaço vectorial complexo, do qual os conjuntos $\mathscr{C}_n$ são subespaços vectoriais. A derivação, D, é uma aplicação linear de $\mathscr{C}_\infty$ em si mesmo (ou de $\mathscr{C}_n$ em $\mathscr{C}_{n+1}$, para qualquer $n \in N$).

Outra definição que convém introduzir agora é a seguinte: sejam $f \in \mathscr{C}_\infty$, $A \subset R$ um conjunto aberto e $\phi : A \to C$ uma função contínua. Diremos que f *coincide com* ϕ *em* A ($f = \phi$ em A) sse existirem $n \in N_0$ e $F \in \mathscr{C}(R)$ por forma que sejam verificadas as condições:

1.ª) $f = D^n F$;

2.ª) *a restrição de* F *ao conjunto* A, $F \mid A$, *é uma função* n *vezes derivável no sentido usual, tendo por derivada de ordem* n *a função* ϕ.

Por exemplo, no aberto $R \setminus \{0\}$ a distribuição de Heaviside coincide com a função que tem o valor 1 nos pontos positivos e o valor 0 nos negativos; no mesmo conjunto, qualquer distribuição da forma $\sum_{k=0}^{p} \alpha_k \delta^{(k)}$, com $\alpha_k \in C$ — isto é, qualquer combinação linear de derivadas da distribuição de Dirac — coincide com a função nula (embora o resultado não nos seja necessário na sequência, será interessante provar como exercício que, reciprocamente, qualquer distribuição que seja nula em $R \setminus \{0\}$ é uma combinação linear de derivadas de δ).

Como vimos há pouco, as operações de adição de funções contínuas e de multiplicação de um número por uma função generalizam-se às distribuições sem qualquer dificuldade. Não se passa o mesmo com a multiplicação usual de duas funções.

Na realidade, como teremos oportunidade de verificar na sequência por meio de um exemplo devido a L. Schwartz, não é possível dar uma definição de produto de duas distribuições quaisquer que possua um mínimo de propriedades desejáveis (por exemplo, que seja associativo, satisfaça a regra usual de derivação de um produto e coincida com o produto usual no caso de ambos os factores serem funções contínuas). Há, sim, diversas teorias de multiplicação de distribuições, de maior ou menor generalidade, obrigando também, algumas delas, à criação de novos entes.

Limitar-nos-emos a tratar aqui o caso mais simples, no qual o único tipo de produto que se considera é o de funções de classe $\mathscr{C}^\infty$ por distribuições. Este tipo de multiplicação pode ser introduzido por meio da proposição seguinte, de cuja demonstração daremos apenas um esboço, que o leitor não terá dificuldade em transformar numa verdadeira demonstração:

Existe uma e uma só aplicação $(\varphi, f) \to \varphi f$, *de* $\mathscr{C}^\infty \times \mathscr{C}_\infty$ em $\mathscr{C}_\infty$, *verificando as condições:*

1.ª) *se* $f \in \mathscr{C}$, φf *é o produto usual*;

2.ª) *para qualquer* $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$ *e qualquer* $f \in \mathscr{C}_\infty$, $D(\varphi f) = \varphi' f + \varphi D f$.

É fácil ver que não pode haver mais de uma aplicação nas condições indicadas. Com efeito, da última fórmula precedente obtém-se imediatamente:

$$\varphi D f = D(\varphi f) - \varphi' f,$$

igualdade que permite reconhecer que (se for possível definir a multiplicação em referência) o produto da função φ pela derivada da distribuição f estará univocamente determinado logo que o estejam os produtos de φ e φ' por f; segue-se que, logo que esteja determinado o sentido que deve ser atribuído ao produto de *qualquer* função de classe $\mathscr{C}^\infty$ por uma distribuição f, determinado estará também o do produto de *qualquer* função de classe $\mathscr{C}^\infty$ por Df. Sendo assim, como a 1.ª) condição fixa o sentido a atribuir ao produto φf no caso em que $f \in \mathscr{C}$ e φ é um elemento arbitrário de $\mathscr{C}^\infty$ (ou até de $\mathscr{C}$), a unicidade da aplicação em causa decorre imediatamente, por indução sobre o grau da distribuição f.

Convém observar agora que (continuando a admitir a existência da multiplicação em causa), a fórmula

$$\varphi D f = D(\varphi f) - \varphi' f$$

permite deduzir que, para $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$ e $g \in \mathscr{C}_\infty$, deverá ter-se:

$$\varphi D^2 g = \varphi D(Dg) = D(\varphi Dg) - \varphi' Dg =$$

$$= D[D(\varphi g) - \varphi' g] - [D(\varphi' g) - \varphi'' g] =$$

$$= D^2(\varphi g) - 2D(\varphi' g) + \varphi'' g.$$

Em geral, verifica-se facilmente por indução que, nas condições referidas:

$$\varphi D^n g = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k}(\varphi^{(k)} g).$$

Assim, se f fôr uma distribuição arbitrária e n um

inteiro tal que $f \in \mathscr{C}_n$ — existindo portanto $F \in \mathscr{C}$, tal que $f = D^n F$ — ter-se-á necessariamente (se existe de facto uma aplicação de $\mathscr{C}^\infty \times \mathscr{C}_\infty$ em $\mathscr{C}_\infty$ verificando as condições 1.ª e 2.ª):

$$\varphi f = \varphi D^n F = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k}(\varphi^{(k)} F).$$

Como agora todas as parcelas do segundo membro têm um sentido preciso, é natural pensar em recorrer a esta fórmula para definir o produto φf e provar finalmente a sua existência. Pode-se, de facto, fazê-lo mas há que provar que a definição é coerente (isto é, que o produto φf não depende da representação adoptada para a distribuição f) e que são efectivamente verificadas as condições postas de início. Trata-se de tarefa que exige algum trabalho de cálculo; deixamo-la como exercício.

Convém observar que, para definir o produto φf pela fórmula precedente, não há necessidade de supor $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$, mas apenas $\varphi \in \mathscr{C}^n$ (desde que seja, como suposémos, $f \in \mathscr{C}_n$). Esta ideia conduz a uma extensão do conceito de multiplicação, a qual, para cada $n \in N$, poderá passar a ser encarada como uma aplicação de $\mathscr{C}^n \times \mathscr{C}_n$ em $\mathscr{C}_n$. No entanto, mesmo nesta acepção, as únicas funções que são multiplicáveis por *qualquer* distribuição são as de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Antes de começarmos a ver exemplos, observemos que a multiplicação gosa das propriedades expressas nas fórmulas (válidas para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^\infty$ e quaisquer $f, g \in \mathscr{C}_\infty$)[6]:

$$(\varphi + \psi) f = \varphi f + \psi f, \quad \varphi(f + g) = \varphi f + \varphi g, \quad \varphi(\psi f) = (\varphi\psi) f.$$

A demonstração é imediata usando, por exemplo, indução sobre o grau de f (ou sobre o maior dos graus de f e g); vejamos a última propriedade, a título de exemplo.

Sendo a igualdade $\varphi(\psi f) = (\varphi\psi) f$ verdadeira no caso de ser $f \in \mathscr{C}$ (quaisquer que sejam $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^\infty$) admitamos que o é também para qualquer distribuição que pertença a $\mathscr{C}_n$ e seja $f \in \mathscr{C}_{n+1}$. Sendo g uma primitiva de f (que sempre existe, basta tomar D^{n+1} (3F), se fôr $f = D^{n+1} F$) ter-se-á $g \in \mathscr{C}_n$ e, usando em particular a hipótese de indução:

$$(\varphi\psi) f = (\varphi\psi) Dg = D[(\varphi\psi) g] - (\varphi\psi)' g =$$

$$= D[\varphi(\psi g)] - \varphi'(\psi g) - \varphi(\psi' g) = \varphi D(\psi g) - \varphi(\psi' g) =$$

$$\varphi[D(\psi g) - \psi' g] = \varphi[\psi Dg] = \varphi(\psi f).$$

Reconhece-se também sem dificuldade que, se a função φ fôr constante — $\varphi(x) = \alpha \in C$, para cada $x \in R$ — o produto φf coincide com o produto αf anteriormente definido; em particular, para qualquer $f \in \mathscr{C}_\infty$, $0f$ é a função nula e $1f = f$.

Nos exemplos que vamos expôr, cometeremos por vezes o abuso de notação que consiste em designar uma função φ por $\varphi(x)$ · poderemos incorrer ainda no mesmo abuso quando se trate de distribuições (por exemplo, escrevendo $\delta_a(x)$ em lugar de δ_a) embora neste caso, como já referimos, um símbolo da forma $f(x)$ nem sequer sirva em geral para designar o valor da distribuição f no ponto x (valor que pode nem existir).

1.º) Tendo em conta as igualdades:

$$x\, Y(x) = x\, DJ(x) = D[x\, J(x)] - J(x)$$

e o facto de $x\, J(x)$ (produto de duas funções contínuas, portanto idêntico ao produto usual) ser uma função de classe $\mathscr{C}^1$, com a derivada $2J(x)$ (no sentido usual, e também no das distribuições) pode concluir-se que $xY(x) = J(x)$.

Derivando ambos os membros, obtém-se:

$$Y(x) + x\, \delta(x) = Y(x),$$

ou $x\, \delta(x) = 0$.

Para n inteiro maior do que 1 vem então:

$$x^n\, \delta(x) = (x^{n-1}\, x)\, \delta(x) = x^{n-1}\, (x\, \delta(x)) = 0.$$

Mais geralmente, sendo m e n inteiros não negativos:

$$x^m \delta^{(n)}(x) = x^m D^n\, \delta(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} m(m-1) \ldots$$

$$\ldots (m-k+1)\, D^{n-k}(x^{m-k}\, \delta(x)).$$

Se $m > n$, todos os produtos $x^{m-k}\, \delta(x)$ são nulos; se $m \leqslant n$, a única parcela do somatório que não é nula é a que corresponde a $k = m$; assim, ter-se-á:

$$x^m \delta^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } m > n, \\ (-1)^m \dfrac{n!}{(n-m)!}\, \delta^{(n-m)}_{(x)} & \text{se } m \leqslant n. \end{cases}$$

Reconhece-se de modo análogo que, para qualquer $a \in R$, se tem $(x-a)\, \delta_a(x) = 0$ e, mais geralmente:

$$(x-a)^m \delta_a^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } m > n, \\ (-1)^m \dfrac{n!}{(n-m)!}\, \delta_a^{(n-m)}(x) & \text{se } m \leqslant n. \end{cases}$$

2.º) Calculemos agora o produto $\varphi \delta_a$, sendo φ uma função de classe $\mathscr{C}^\infty$ arbitrária, o que nos conduzirá a uma das fórmulas mencionadas no §2.

[6] Válidas também se fôr $\varphi, \psi \in \mathscr{C}^n$ e $f, g \in \mathscr{C}_n$, com n inteiro positivo arbitrário.

Fazendo a mudança de variável $t = a + \tau(x-a)$ no integral que figura no segundo membro da igualdade:

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \varphi'(t)\, dt,$$

obtém-se

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x-a) \int_0^1 \varphi'[a + \tau(x-a)]\, d\tau.$$

Como a função integranda é indefinidamente diferenciável como função de x, também será de classe $\mathscr{C}^\infty$ a função ψ definida por

$$\psi(x) = \int_0^1 \varphi'[a + \tau(x-a)]\, d\tau.$$

Pode portanto concluir-se que, para qualquer função $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$ e qualquer ponto $a \in R$ existe $\psi \in \mathscr{C}^\infty$ tal que

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\, \psi(x),$$

tendo-se evidentemente $\psi(a) = \varphi'(a)$.

De modo análogo, usando a fórmula de Taylor de ordem n com resto na forma integral e efectuando nesse integral a mudança de variáveis há pouco referida, concluir-se-ia que, dados[7] $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$, $a \in R$ e $n \in N$, existe uma função $\psi \in \mathscr{C}^\infty$ tal que

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\psi(x),$$

com $\psi(a) = \varphi^{(n)}(a)$.

Nestas condições, para qualquer $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$ ter-se-á:

$$\varphi(x)\, \delta_a(x) = \varphi(a)\, \delta_a(x) + [(x-a)\, \psi(x)]\, \delta_a(x) = \varphi(a)\, \delta_a(x) + \psi(x)\, [(x-a)\, \delta_a(x)],$$

isto é:

$$\varphi(x)\, \delta_a(x) = \varphi(a)\, \delta_a(x).$$

Este é um dos aspectos que pode assumir uma das fórmulas referidas no §2[8]. Mais geralmente:

$$\varphi(x)\, \delta_a^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\, \delta_a^{(n)}(x) + \frac{1}{n!}\psi(x)(x-a)^n\, \delta_a^{(n)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \frac{n!}{(n-k)!}\, \delta_a^{(n-k)}(x) + \frac{(-1)^n}{n!}\, n!\, \varphi^{(n)}(a)\, \delta_a(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(a)\, \delta_a^{(n-k)}(x)$$

Terminamos as referências à multiplicação de distribuições com um exemplo célebre, já atrás anunciado, que permite reconhecer a impossibilidade de definir uma aplicação $(f, g) \to f.g$, de $\mathscr{C}_\infty \times \mathscr{C}_\infty$ em $\mathscr{C}_\infty$, desde que se pretenda impôr-lhe, além da associatividade — $(f.g).h = f.(g.h)$, para quaisquer $f, g, h \in \mathscr{C}_\infty$ — a verificação das condições:

1) se $f, g \in \mathscr{C}$, $f.g$ é o produto usual de f e g;
2) para quaisquer $f, g \in \mathscr{C}_\infty$, $D(f.g) = Df.g + f.Dg$.

Notemos em primeiro lugar que uma tal aplicação — se existisse — prolongaria necessariamente o produto $(\varphi, f) \to \varphi f$ que temos vindo a considerar (isto é, ter-se-ia $f.g = fg$ se $f \in \mathscr{C}^\infty$ e $g \in \mathscr{C}_\infty$). Notemos ainda que da condição 2) decorre facilmente, por um lado que o produto f.g seria igual à função nula no caso $g = 0$ (se $f = 0$, a igualdade $f.g = 0$ resultaria do facto de ser $f.g = fg$ se $f \in \mathscr{C}^\infty$), por outro que seria válida a fórmula para a segunda derivada do "produto" f.g:

$$D^2(f.g) = D^2f.g + 2\, Df.Dg + f.D^2g,$$

quaisquer que fossem $f, g \in \mathscr{C}_\infty$.

Designemos então por θ a função contínua em R tal que

$$\theta(x) = x(\log|x| - 1)$$

para cada $x \neq 0$ e observemos que a função $\lambda: R \to R$ definida por $\lambda(x) = x\,\theta(x)$ é de classe $\mathscr{C}^1(R)$, o que implica $D\lambda = \lambda'$ ou, como se reconhece atendendo à expressão de θ:

$$D\,\lambda(x) = 2\,\theta(x) + x$$

e portanto também

$$D^2\lambda(x) = 2\, D\theta(x) + 1.$$

---

(7) Supondo apenas $\varphi \in \mathscr{C}^p$, com $p \geq n$, concluir-se-ia de modo idêntico a validade da mesma fórmula com $\psi \in \mathscr{C}^{p-n}$ (em lugar de $\psi \in \mathscr{C}^\infty$). Esta observação permitiria obter a fórmula relativa ao produto $\varphi\,\delta_a^{(n)}$ em condições mais gerais do que as consideradas no texto.

(8) Pode provar-se que a fórmula é válida em condições muito mais gerais, designadamente se φ fôr uma distribuição que coincida com uma função contínua num aberto que contenha o ponto a.

Sendo assim, substituindo f por θ e g pela função identidade na fórmula relativa à segunda derivada do produto f.g, obtém-se:

$$D^2\lambda(x) = D^2\theta.x + 2\ D\theta(x)$$

ou, atendendo a um resultado anterior:

$$D^2\theta.x = 1.$$

Antes de dar o exemplo de Schwartz há pouco referido, convém indicar que, para designar a distribuição $D^2\theta$, Schwartz usa o símbolo Pf $\frac{1}{x}$ (parte finita de $\frac{1}{x}$), o qual, na literatura, assume frequentemente a forma simplificada $\frac{1}{x}$. Usando a notação de Schwartz tem-se então:

$$(\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x}\,.x).\delta = 1.\ \delta = \delta$$

e

$$\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x}\,.(x.\delta) = \mathrm{Pf}\,\frac{1}{x}\,.0 = 0$$

e portanto

$$(\mathrm{Pf}\,\frac{1}{x}\,.x).\delta \neq \mathrm{Pf}\,\frac{1}{x}\,.(x.\delta),$$

o que prova a impossibilidade de definir em $\mathscr{C}_\infty$ uma multiplicação associativa que verifique as condições 1) e 2).

Introduziremos agora as últimas definições de que necessitamos para obter as fórmulas mencionadas no §2 em que intervêm integrais. A ideia intuitiva que está na base destas definições é a de recorrer à fórmula de Barrow para definir, em certos casos, o integral de uma distribuição.

Diremos que a distribuição f é **elementarmente integrável** (em R) sse existir uma distribuição g, um aberto $A \subset R$, cujo complementar $R \setminus A$ seja um conjunto limitado, e uma função $\phi : A \to C$ contínua em A e com limites finitos nos pontos $+\infty$ e $-\infty$ ($\phi(+\infty)$ e $\phi(-\infty)$, respectivamente) por forma que se tenha:

$$f = Dg$$

e

$$g = \phi\ (\text{em } A).$$

Nestas condições, poremos, por definição:

$$\int_R f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \phi(+\infty) - \phi(-\infty).$$

É evidente a coerência desta definição: se g^* é outra primitiva de f, tem-se $g^* = g + c$, com c constante, e portanto também $g^* = \phi^*$ (em A) se fôr $\phi^* = \phi + c$; logo $\phi^*(+\infty) - \phi^*(-\infty) = \phi(+\infty) - \phi(-\infty)$.

É também imediata a verificação da linearidade do integral: se f e g são distribuições elementarmente integráveis e $\alpha, \beta \in C$, a distribuição $\alpha f + \beta g$ é também elementarmente integrável e

$$\int_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_R f + \beta \int_R g.$$

Por fim, reconhece-se sem qualquer dificuldade que se tem, para qualquer $a \in R$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x)\ dx = 1$ e, para qualquer $n>1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a^{(n)}(x)\ dx = 0$. Pode portanto concluir-se que, se fôr $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$, será também:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ \delta_a(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(a)\ \delta_a(x)\ dx =$$

$$= \varphi(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x)\ dx = \varphi\ (a)$$

e, mais geralmente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ \delta_a^{(n)}(x)\ dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \varphi^{(k)} \in (a) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a^{(n-k)}(x)\ dx =$$

$$= (-1)^n\ \varphi^{(n}\ (a).$$

Convém observar que todos estes resultados são válidos em situações de muito maior generalidade. Esperamos poder mostrá-lo num próximo artigo, que incluirá também algumas aplicações, designadamente a questões importantes da teoria das equações diferenciais.

OBJECTIVOS DE DESENVOLVIMENTO ECONÓMICO EM PORTUGAL E A SUA ARTICULAÇÃO COM A POLÍTICA COMUNITÁRIA *

Marco António Monteiro d'Oliveira
Engenheiro Civil, Doutor em Economia Industrial

Sumário

Os objectivos específicos do Desenvolvimento Económico em Portugal, articular-se-ão com a política comunitária, não por alteração do seu conteúdo qualitativo ou metas quantitativas, mas fundamentalmente pelas vias escolhidas na sua prossecução.

Efectivamente a adesão à Comunidade Europeia resultou da convicção de que os objectivos nacionais seriam mais bem defendidos dentro da C.E.E., que fora dela.

Sendo Portugal um país de Economia aberta, e por força da sua dimensão reduzida, haver vantagem que continue a sê-lo, o acervo comunitário apenas se traduzirá nalguns desvios no nosso comércio, trazendo alguns constrangimentos à livre concorrência, para países exteriores à C.E.E., reforçando essa livre concorrência no seu interior.

Os capítulos 1 e 2 deste texto apresentam as linhas de força do Desenvolvimento Português, no seu enquadramento internacional.

O capítulo 3 resume o Livro Branco do Mercado Interno,onde a CEE define os objectivos a atingir até 1992.

Finalmente o capítulo 4 evidencia quanto os objectivos nacionais têm a ganhar em celeridade e rigor, ao assumir o enquadramento comunitário, que além disso lhe poderão proporcionar ganhos internacionais, doutro modo inatingíveis.

Abstract

The targets of the Portuguese Development suffered no bias in European Community. On the contrary they gained more available resources in order to get speed and accuracy towards the modernization of the Economy and Public Administration.

Chapter 1 and 2 of this paper refer the goals of the Portuguese Development within the international framework. Chapter 3 sumarizes the Internal Market White Book where the E.E.C. defines the objectives to be reached till 1992. In Chapter 4 it is presented how consistent both National and European targets are.

1 INTRODUÇÃO

1.1 O Contexto Internacional

A crescente complexidade da economia mundial resulta fundamentalmente de dois factores, que ocorreram quase em simultâneo, reduzindo a capacidade de resposta a novas situações, de mais ou

---

* *Intervenção no âmbito do Seminário da Associação Industrial Portuguesa sobre Implicações Sectoriais da Adesão de Portugal à C.E.E. - Dezembro de 1986.*

menos previsibilidade.

Por um lado a prolongada recessão económica levou a políticas de estabilização, que privilegiaram as exportações, penalizando os consumos internos. Não encontrando procura suficiente nos mercados tradicionais, os agentes economicos procuraram novos espaços de concorrência, quer oferecendo créditos fáceis, quer aproveitando eventuais excedentes financeiros (OPEP).

Por outro lado, a este alargamento de mercados correspondeu a disseminação das novas tecnologias de informação, que, propagando quase instantaneamente, qualquer perturbação, a todo o planeta, tornam muito mais difíceis os ajustamentos em tempo útil, e prologam quase indefenidamente as situações de crise.

Como expressões mais evidentes desta crise apontaram-se os dois primeiros choques petrolíferos, que em dez anos decuplicaram os custos energéticos, levando a profundos ajustamentos da estrutura produtiva dos países industrializados, e a um deslocamento dos fluxos financeiros e do comercio mundial, em ordem a compensar as novas razões de troca.

Os ajustamentos em curso parece terem sido bloqueados pelo terceiro choque petrolífero, que em poucos meses fez baixar o preço do petróleo para valores inferiores ao de há dez anos.

Potencializando esta evolução, a moeda americana, que como moeda de refúgio parecia ser insensível ao crescente desiquilibrio da sua Balança Comercial, inverte a tendência altista, iniciando uma persistente desvalorização.

Estes dois acontecimentos, ainda que há muito previstos, nem por isso deixam de funcionar como amplificadores um do outro, arrastando na sua evolução, quer a subida e descida de preços de outras matérias primas, quer o ressurgimento de políticas protecionistas, que, marcadamente conjunturais, não deixarão de durar enquanto durar a crise.

Como novidade na actual evolução económica surge a incapacidade das grandes potências (E.U.A., U.R.S.S., Japão) controlarem a crise, ou ao menos eximirem-se dela, assistindo-se a uma permanente negociação de compromissos, com que tacitamente se procura evitar agravamentos da situiação.

No contexto desta economia que se planetarizou, a Europa do Mercado Comum, embora seja a maior potência económica mundial, é bastante limitada na sua definição de uma politica própria, pela constante necessidade de concertação entre os Estados Membros.

Como subsistema do sistema mundial, a C.E.E. vem desenvolvendo a sua própria racionalidade, e, apesar das limitações internas, tem procurado, em alguma medida influenciar o sistema global.

Não havendo alternativa credível para a Europa, a C.E.E. tenderá a reforçar a sua coesão interna, em ordem a ganhar maior peso no sistema mundial.

Inserido na Comunidade Europeia, Portugal será cada vez mais influenciado pela dinâmica comunitária, na medida em que o seu peso no conjunto europeu é diminuto (1% do produto e 3 % da população).

No entanto, não podendo a C.E.E. engeitar a diversidade cultural que a gerou, nem ignorar a soberania dos Estados que a compõem, será muito mais o dinamismo com que Portugal participar na construção europeia, do que a sua dimensão económica, que irá ponderar a sua própria influência.

1.2 A Comunidade Nacional

Na sequência das recentes melhorias na qualidade de vida e bem estar da população portuguesa, a sua esperança de vida vem aumentando regularmente, ultrapassando já os 73 anos.

A redução da mortalidade colocou o nosso índice de mortalidade global a par da média europeia, com a grave reserva da mortalidade infantil continuar muito alta em termos europeus (16.7% em Portugal contra 9.7% na Europa dos Dez).

Desta evolução recente resulta um envelhecimento acelerado da população, que até ao ano 2000 deverá substituir cerca de meio milhão de crianças por meio milhão de velhos.

Em termos económicos esta evolução reflecte-se directamente no sistema de segurança social, sobrecarregado com um número de pensionistas excessivo, relativamente ao número de contribuintes (cerca de 50%), situação que vem a ser agravada por esquemas de reformas antecipadas, ou aumentos de pensões.

Na área laboral também as regras de contratação se modificaram na última década, garantindo aos trabalhadores vantagens até aí desconhecidas no nosso país, mas que tiveram como referência a situação europeia na época de crescimento económico, só sendo portanto possíveis de manter numa época de expansão.

No âmbito da Macroeconomia ainda se fazem sentir os efeitos das nacionalizações ocorridas a meio da época de 70, que fizeram desaparecer os grandes grupos económicos e a racionalidade a eles inerente, sem que o grupo do Estado se lhes tenha conseguido

A situação foi agravada pela adopção de políticas conjunturais que frequentemente intrumentalizaram o Sector Empresarial do Estado para soluções de curto prazo, que no entanto deixaram às empresas encargos duradouros, de difícil liquidação.

A preocupação com curto prazo traduziu-se também numa politica de "stop and go", com periodos de expansão não sustentada, separados por dois periodos de recessão, em 1978 e 1983, assinalados por acordos com o Fundo Monetário Internacional.

O sector Público Administrativo também atravessou uma fase de grande desregulação, com acumulação de sucessivos défices das Contas Públicas.

Em 1985 as transferências e os juros da divida pública atingiram cerca de 50% das despesas correntes. Se se lhes somar 30% para as despesas de pessoal restam apenas 20% para outras despesas, com a particularidade de aqueles 80% já excederem em 12% o total das receitas do Estado.

Sectorialmente tem vindo a crescer a importancia do Terciário, quer como empregador, quer como gerador de riqueza, embora ainda longe do peso dos Serviços na C.E.E.

Na Industria o crescimento do produto não tem tido contrapartida na criação de postos de trabalho, nem é de prever que os seus efectivos venham a aumentar, embora haja transferências sub-sectoriais.

A Agricultura, pelo contrário, vem a dispensar trabalhadores, mas ainda se mantém bastante longe da média da C.E.E. (21.7% dos activos portugueses, contra 7.2% na C.E.E.).

A dependência externa, duma maneira geral, tem vindo a aumentar com maiores importações de bens alimentares e energéticos e reforço das exportações, sobretudo nos sectores tradicionais (texteis, curtumes, produtos florestais). Notam-se no entanto alguns desenvolvimentos significativos em seguementos das químicas, metalurgicas, electromecânicas e electrónicas, que poderão vir a diversificar as nossas dependências externas.

Convém ainda referir a grande vulnerabilidade tecnológica do sistema productivo, com gastos na importação de tecnologia quatro vezes superiores às despesas de I&D.

2. OBJECTIVOS DO DESENVOL-VIMENTO ECONÓMICO

2.1 Superação dos Desiquílibrios Macro-Económicos

A estratégia de desenvolvimento económico exige um elevado grau de concertação entre as várias medidas de política, que, visando multíplos objectivos, interligados e faseados no tempo, possam superar bloqueios de curto prazo e beneficiar de efeitos acumulados, maximizando a utilização dos recursos disponíveis.

A Inflação e o Desiquílibrio das Relações com o Exterior, o Défice das contas Públicas e o Desemprego, constituem actualmente os objectivos prioritários, que enquadram qualquer programa de desenvolvimento económico português, e que pela sua interdependência só podem ser abordados em conjunto.

Ainda que em queda rápida nos dois últimos anos a **Inflação** tem vindo a constituir um dos grandes factores de perturbação da actividade económica portuguesa. Aumentando o risco dos investimentos, suscitando diversas ilusões monetárias, ou redistribuindo riqueza de forma aleatória, ela impede qualquer política de concertação social, confundindo os agentes económicos nas suas sempre ultrapassadas previsões.

A política de contenção da inflação pretende atingir os anos de 1988/89 com taxas de crescimento da anual dos preços de 4% a 6%, ou seja, metade da inflação verificada em 1986, e 1/5 da de1984.

Na prossecução deste objectivo será necessário garantir uma política de rendimentos e preços baseada numa justa distributividade, e assegurar, para além da estabilidade das remunerações de trabalho, a redução dos custos de produção, pelo aumento de productividade dos outros factores produtivos. Em conformidade, também os circuitos de distribuição comercial deverão ser encurtados e melhorados, em benefício do preço final dos produtos.

A **Balança de Transacções Correntes** fortemente desiquilibrada desde meados da década de 70, obrigou a um endividamento externo, que, já no inicio da década de 80, se aproximou da rutura cambial.

Embora em recuperação desde 1985, em grande parte por razões conjunturais, ela depende de substânciais alterações na estrutura do nosso sistema produtivo, que adeque a oferta às exigências da procura interna, reduzindo simultâneamente a componente importado dos bens finais.

Um melhor aproveitamento dos recursos nacionais em matérias primas e capacidade tecnológica, bem como um melhor encaminhamento dos recursos financeiros disponíveis, para opurtunidades industriais que um mercado mais aberto e competitivo irá evidênciar, atenuará certamente a nossa dependência externa em energia, bens alimentares e bens de equipamento.

Uma mais racional utilização da energia, no contexto ibérico e comunitário, aproveitando os excedentes espanhóis e franceses, poderá ser solução de curto prazo, que permita ganhar o tempo necessário a soluções duradouras, sem sacrificar os nossos modestos consumos actuais.

O equilíbrio das **Contas Públicas** constitui um outro relevante objectivo no saneamento da economia portuguesa.

Acumulando défices durante dez anos, o Orçamento do Estado tornou-se um sorvedouro das poupanças privadas, dificultando o financiamento da Economia por escassez de capitais e subida das taxas de juro.

Não sendo possível corrigir rapidamente o desiquilíbrio orçamental, devido à rigidez da despesa pública, e ao alto nível já atingido pela imposição fiscal, haverá que reduzir progressivamente o seu peso relativo, pelo incremento da actividade económica.Entretanto prosseguirá a modernização do sistema fiscal, iniciada na tributação indirecta com a introdução do I.V.A., a que se seguirá a tributação directa, e introdução do imposto único.

Em ordem a incentivar a actividade económica já foi criado o Crédito Fiscal por Investimento, e a Dedução à Matéria Colectável dos Lucros Reinvestidos.

No mesmo sentido se tem procurado modernizar o sistema financeiro, em ordem a reduzir os custos da intermediação, e se criaram novos instrumentos financeiros, no sentido de promover o aforro, e a sua eficiente aplicação.

A redução da inflação, a recuperação verificada nas contas com o exterior, e a redução do impacto do défice do Orçamento do Estado, isolaram o **Desemprego**, como objectivo prioritário de mais difícil superação.

Embora a percentagem da população activa desocupada, não seja em Portugal superior à média europeia, ela é, em termos absolutos, um valor bastante alto (10% a 11%), com custos sociais elevados, ainda que de difícil quantificação.

Sendo uma das vantagens comparativas da economia portuguesa a aptidão da sua mão-de-obra, o aproveitamento dessa vantagem passa pelos investimentos de baixa intensidade capitalista e tecnologia não muito sofisticada.

Como incentivo a esses investimentos propõem-se:

a) Desonerar o emprego de encargos fiscais e para fiscais
b) Elevar a productividade do trabalho pela formação profissional
c) Reduzir o sobrecusto da rigidez laboral pela flexibilização da legislação
d) Facilitar a transferência de emprego entre sectores
e) Justificar economicamente a criação de postos de trabalho por uma conveniente política de rendimentos (moderação salarial)

2.2 Produção e Distribuição de Riqueza

Na produção e distribuição de riqueza competirá ao Estado uma função supletiva, reguladora, fiscalizadora e incentivadora dos agentes económicos, apoiando a sua adaptação a um mercado cada vez mais alargado, dinâmico e competitivo.

Nesse sentido o Estado terá que garantir um sistema de transportes, comunicações e telecomunicações, que permita processos de decisão devidamente informados e concluidos em tempo útil.

Também no que respeita à investigação e à sua aplicação ao sistema produtivo, o Estado deverá promover o reforço das infraestruturas científicas e tecnológicas, especialmente orientadas no sentido de desenvolver processos inovadores, que garantam "Know-how" às actividades económicas.

Vivendo o sistema científico e o sistema produtivo no quase desconhecimento um do outro, importa superar esse afastamento, e rentabilizar a investigação, garantindo-lhe actualidade e capacidade de auto-regeneração.

Finalmente, e enquanto o próprio Estado é agente económico através do seu sector Empresarial, haverá que fazer uma clara distinção entre as empresas prestadoras de serviços sociais e que nessa qualidade deverão receber as correspondentes contrapartidas, e aquelas empresas que nada justifica que não operem em mercado aberto de livre concorrência.

A par da dependência energética, a dependência em bens alimentares constituiu um dos mais pesados constrangimentos da economia portuguesa.

Neste contexto a **Agricultura** torna-se um sector estratégico do desenvolvimento, mas que a par disso, por força do seu longo ciclo produtivo e sujeição a contingencias naturais, constitui uma forma de vida diferenciada, com valores e interesses próprios. A ruralidade, com o seu peso de experiência acumulada em sucessivas gerações, é um factor de inércia numa fase de transformações aceleradas como de facto vai ser exigido no processo de integração europeia.

A aplicação do Plano Agricola Comum (P.A.C.) a Portugal constitui o maior desafio que alguma vez a nossa Agricultura teve de enfrentar.

Com um peso de efectivos de 22% dos activos

nacionais, muito acima da média europeia, um mercado pouco aberto ao exterior, apesar de algumas vantagens comparativas, uma população envelhecida, em boa parte sem comunicações fáceis com os centros urbanos, a Agricultura terá de se rejuvenescer e ultrapassar o individualismo tradicional, para através das suas associações definir por si, ainda que com o apoio técnico e financeiro do Estado, os objectivos de médio prazo, e as inerentes transformações a realizar.

Serão as organizações de agricultores que terão de avaliar os investimentos necessários aos aumentos de produtividade, bem como as indispensáveis medida envolventes, no domínio das infraestruturas físicas, apoio tecnológico, apoio e formação profissional, eventuais alterações na estrutura fundiária, bem como as necessidades de transformação industrial a jusante, que lhes permita pleno aproveitamento dos aumentos de produção.

Naturalmente que o ordenamento florestal, quer como actividade silvicultora, quer como complemento de actividade agrícola, é parcela indispenável na afirmação das vantagens comparativas do sector.

Na linha de superação das dependências alimentares e do subaproveitamento dos recursos nacionais, a **Pesca** é um dos sectores de actividade em que se verifica maior atraso relativamente aos nossos parceiros da C.E.E., apesar das reconhecidas potencialidades da nossa Zona Económica Exclusiva.

É urgente a sua modernização, naturalmente apoiada em actidades de conservação e transformação do pescado, que, a juzante, garantam o total aproveitamento dos acréscimos de produção.

A **Indústria e Comércio** são as actividades que pela sua dinâmica própria, e experiência de abertura ao exterior, prontamente podem responder a um mercado cada vez mais alargado e competitivo.

A circulação de informação e a internacionalização da tecnologia proporcionam referências e oportunidades que estruturas empresariais flexíveis poderão aproveitar.

A intervenção supletiva do Estado irá incidir preferencialmente no apoio às infraestruturas tecnológicas, que garantam a qualidade, estimulem a inovação, incentivem as P.M.E., ou melhorem o aproveitamento da energia e de outros factores produtivos.

Os cursos de formação profissional, os laboratórios de controle de qualidade, a investigação aplicada à indústria, os centros de tecnologia de informação, a rede de extensão industrial, ou os centros de conservação de energia, constituirão os contributos do Estado para a modernização do parque produtivo, a emprender pelos industriais.

A implementação regional de mercados de origem, em ligação com os mercados abastecedores, junto aos centros urbanos, o encurtamento dos circuitos comerciais e aumento da sua produtividade, a abertura progressiva dos mercados internos, apenas condicionada pelo princípio da reciprocidade, serão as intervenções com que o Estado procurará fomentar o redimensionamento e competividade das empresas comerciais.

Sendo Portugal talvez o mais homogéneo país da Europa, no que respeita à língua e cultura, nem por isso as múltiplas vicissitudes da sua história deixaram de o diferenciar em subregiões, criando assimetrias que ampliaram diferenças naturais, e acentuaram desigualdades no acesso a melhores condições de vida.

A concentração da Indústria e dos Serviços no litoral, e o efeito de atração que essas zonas mais desenvolvidas exerceram sobre o interior, tem sido tão continuado e habitual, que as desigualdade que se foram ampliando quase se confundem com factores de ordem natural.

Sendo o **Desenvolvimento Regional** uma preocupação de fundo da C.E .E., para o qual são mobilizados avultados recursos financeiros, pensa-se haver possibilidade de concretizar grande parte das potencialidades regionais, quer por uma melhor distribuição do sistema produtivo, quer por uma melhor repartição das infraestruturas físicas que suportam esse sistema.

Sem pretender uniformizar o território, haverá que valorizar a diferenciação regional num contexto de desenvolvimento global do país.

3 POLÍTICA COMUNITÁRIA -O MERCADO INTERNO

3.1 Apresentação do Livro Branco

Desde a sua constituição, pelo Tratado de Roma, a Comunidade Económica Europeia procurou um aumento de prosperidade dos respectivos países, pela integração dos vários mercados nacionais num mercado único, em que a livre circulação de pessoas e bens, serviços e capitais, estimulasse as trocas comerciais, assegurando às empresas possibilidades quase ilimitadas de expansão.

A criação desse enquadramento dinamizador da actividade económica, exigia a correção de diversos obstáculos à livre concorrência, que distorciam as desejáveis condições de igualdade, em que se deviam apresentar à partida todos os concorrentes.

As dificuldades que mais se avantajavam,

situavam-se ao nível das protecções aduaneiras, progressivamente desmanteladas, e, logo depois, na diversidade da fiscalidade indirecta, harmonizada pelo imposto sobre valor acrescentado (I.V.A.).

A conclusão desta primeira fase de integração de mercados veio a coincidir com o ínicio da recessão económica, em meados da década de 70.

Por força do acervo da legislação comunitária, já então aceite, não puderam os paises da C.E.E. desencadear as medidas proteccionistas tradicionais, com que habitualmemnte se respondia às crises económicas, pelo que começaram a organizar-se outro tipo de dificuldades às trocas comerciais, designadas de uma maneira geral por "barreiras não tarifárias", enquanto se multiplicavam as ajudas dos fundos públicos às empresas nacionais em dificuldades.

O reconhecimento desta situação, que constituiu um sensível retrocesso na livre concorrência, supostamente adquirida, levou a que várias vezes o Conselho da Europa se debruçasse sobre as potencialidades não aproveitadas do mercado europeu (Copenhague, Dezembro de 1982; Fontainebleau, Junho 1984; Dublin, Dezembro 1984; Bruxelas, Março 1985).

Entenderam os Chefes de Estado e de Governo dos países da C.E.E., na sua reunião de Bruxelas, em Março de 1985, solicitar à Comissão Europeia a elaboração de um programa detalhado, devidamente calendarizado, no sentido da efectiva constituição de um mercado interno europeu.

A Comissão da Comunidade Europeia deu por concluido o seu trabalho em Junho de 1985.

O relatório final recebeu a designação de Livro Branco do Mercado Interno, e aponta para os seguintes objectivos finais, a concretizar até 1992:

- garantir um verdadeiro mercado único, em constante expansão;
- assegurar-lhe dinâmica e flexibilidade suficientes, para que possa utilizar de forma mais convincente os recursos humanos, financeiros e materiais disponíveis na C.E.E..

Para que o mercado interior possa efectivamente prosseguir os objectivos propostos, haverá que:

- reforçar a sua base tecnológica e consequentemente a investigação aplicada;
- apoiar a convergência de políticas económicas e a eficácia do Sistema Monetário Europeu;
- expandir a política comum de transportes, a política social e de ambiente, bem como uma política regional que ponha termo às disparidades actuais;
- condenar as ajudas proteccionistas do Estado, e as práticas restritivas das empresas, ressurgidas recentemente.

As medidas a tomar repartir-se-.ão por três tipos de dificuldade agrupadas em barreiras físicas, técnicas e fiscais.

3.2 Eliminação das Barreiras Físicas

A subsistência de divisões no interior da Comunidade tem a sua expressão mais representatitva nas fronteiras físicas em que se verificam passaportes, se controla a emigração, ou se procuram infrações às regras comerciais.

Suprimidos os direitos aduaneiros e as restrições quantitativas, restam as desigualdades na fiscalidade indirecta e o ainda indispensável controle de pessoas.

Enquanto subsistirem entre paises comunitários contigentes de importação (art° 115 do Tratado de Roma), ou possibilidade de invocar graves ameaças à balança de pagamentos (art° 108 do Tratado de Roma), ou ainda montantes compensatórios no sector agrícola, haverá que manter as barreiras fronteiriças, ainda que aligeirando o sistema, com um único posto aduaneiro que sirva os dois lados da fronteira.

Só o desenvolvimento de uma política comercial e económica comum poderá suprimir o **controle de mercadorias**.

Já no que respeita a verificações fitosanitárias ou veterinárias, elas poderão passar a realizar-se no local de origem, recebendo uma marca comunitária de garantia.

Produtos importados de terceiros paises terão que obedecer a normas entretanto harmonizadas dentro da C. E.E..

Os transportes também terão que ser enquadrados por legislação entretanto compatibilizada, nomeadamente no que respeita à circulação de produtos perigosos.

Quanto à informação estatistica recolhida nas fronteiras, tão necessária a cada um dos paises, como à própria Comunidade, poderá ser produzida pelas empresas responsáveis pelos transportes.

O **controle de pessoas**, circulando no interior da Comunidade, visa a verificação de identidade, bem como eventuais infracções fiscais.

Deixando a fiscalidade para o capítulo 3.4, concretizar-se-á a intenção de facilitar o controle de identidade através da emissão de um documento único, "disco verde", de verificação imediata. Entretanto terão de ser mantidos os controles de segurança, relativamente à criminalidade, droga e terrorismo, mas com expecial incidência nas

fronteiras externas da Comunidade.

Em apoio do controle de segurança torna-se indispensável a harmonização da legislação no que se refere à venda de armas e estupefacientes, e ainda quanto à entrada, residência e emprego de pessoas provenientes de terceiros paises.

3.3 Eliminação das Barreiras Técnicas

Em condições normais de funcionamento do mercado único europeu, não há nenhuma razão para que um produto fabricado e comercializado legalmente num Estado não possa ser vendido livremente em toda a Comunidade.

Igualmente as pessoas e as correspondentes prestações de serviços, quando preencham as condições exigidas ao exercício da sua actividade, deverão poder faze-lo em toda a C:E.E..

Reconhecendo o Conselho da Europa que o maior entrave à livre circulação de bens têm sido as diferentes normas nacionais, mas havendo identidade de objectivos em todas as legislações, entende ser possível uma rápida aproximação entre todas elas desde que se considerem separadamente todos os seus aspectos essenciais, respeitantes à saúde e segurança dos utilizadores, e as especificações técnicas, fixadas pelos vários organismos de normalização.

Quanto às primeiras, elas deverão ser objecto de harmonização legislativa em todo o espaço comunitário, em ordem ao estabelecimento de normas europeias, a aprovar pelo Conselho da Europa, nos termos do art° 100 do Tratado de Roma (regra da unanimidade).

Quanto às segundas, elas poderão manter uma certa diferenciação, desde que sejam objecto de reconhecimento mútuo, que se estenderá aos vários processos de certificação e verificação laboratoriais.

Para que não surjam dificuldades, os Estados serão obrigados a comunicar à Comunidade Europeia novos projectos de normalização, mantendo-os em suspenso até sobre eles se pronunciarem todos os interessados.

No sector específico das tecnologias de informação e das telecomunicações, sectores normalmente dependentes dos poderes públicos, seria de toda a conveniência que desde o inicio se trabalhasse numa base comum que levasse naturalmente ao reconhecimento mútuo.

No sector de materiais de construção dada a grande diversidade de produtos, será importante a elaboração de códigos europeus, que garantam a compatibilidade de elementos a integrar em idênticas estruturas.

Quanto aos produtos alimentares, estando em jogo a saúde e a segurança dos consumidores, o conselho deliberará por unanimidade a harmonização das legislações em matéria de utilização de aditivos, etiquetagem, etc.

Nas restrições à livre concorrência os **mercados públicos** constituem uma das maiores dificuldades até agora levantadas ao mercado comum europeu, sendo certo que ainda hoje menos de 1/4 das encomendas públicas estão abertas à concorrência comunitária. Destacam-se, pela sua grande importância, os sectores da energia, transportes, àgua e equipamento de telecomunicações, para os quais o Conselho da Europa se propõe conseguir a integração até 1992.

No que respeita à livre circulação de trabalhadores assalariados, ela está quase inteiramente realizada, ainda que haja algumas dificuldades na correspondência das qualificações profissionais, prevendo-se a introdução da "carta da formação profissional europeia", que estabelecerá uma base uniforme de qualificações de referência, sendo sempre a experiência profissional o facto nivelador da formação inicial.

Em oposição aos assalariados, os trabalhadores por conta própria e as profissões liberais têm encontrado dificuldades quer quanto à harmonização das qualificações, quer quanto ao livre estabelecimento.

Prevê-se no entanto, a remoção destas dificuldades pelo reconhecimento mútuo de diplomas universitários, na linha da confiança recíproca entre Estados.

A **prestação de serviços** sofreu enorme evolução nos últimos anos, já porque muitos dos chamados serviços tradicionais se separam das empresas industriais a que estavam ligados, já porque surgiram novos serviços, que poderão revolucionar as formas actuais de relação comercial.

Constatou a Comissão Europeia que o progresso na livre prestação de serviços, apesar da enorme importância destes, tem ficado bastante aquém da liberalização na circulação de mercadorias.

Efectivamente, quanto á importância dos serviços, em 1982 eles contavam em 57% do valor acrescentado da C.E.,E., enquanto a indústria, no mesmo ano ficava abaixo de 26%. Também quanto à criação de emprego, enquanto a indústria não cessava de perder postos de trabalho, os serviços criavam, entre 1973 e 1982, 5 milhões de novos empregos. No entanto, a lentidão desta evolução é evidenciada nas comparações com os E.U.A. ou com o Japão, que para o mesmo período criaram 13,4

milhões e 6,7 milhões de postos de trabalho no sector terciário.

No que respeita aos serviços tradicionais (banca, seguros e transportes) tem-se verificado algum progresso, prosseguindo-se uma harmonização de um mínimo de normas comuns, enquanto se procura garantir o reconhecimento mútuo das técnicas financeiras, e se endossa a responsabilidade da fiscalização e controle de cada instituição financeira ao seu país de origem.

Quanto à criação de um mercado europeu de valores mobiliários, haverá que garantir maior transparência através da ligação electrónica das várias bolsas, enquanto se coordenam e reconhecem mutuamente as empresas de locação financeira (O.P.C.V.M. - Organisme de Placement Collectif en Valeurs Mobiliéres).

Os transportes, representando 7% do P.I.B. da Comunidade, têm além disso importantes incidências sobre as actividades económicas.

A liberalização dos transportes por estrada, quer de passageiros, quer de mercadorias, terá de prosseguir no sentido de eliminar as restrições quantitativas (cotas), enquanto que todos os meios de transporte terão de conseguir ultrapassar as dificuldades jurídicas, que se opõem a que residentes de um Estado possam efectuar transportes no interior de outros Estados, quer por estrada, quer no espaço aéreo, quer nas vias interiores navegáveis.

No que respeita aos serviços que surgiram com as **novas tecnologias**, nomeadamente os audiovisuais, a informação e a informática, e ainda a informatização da comercialização e distribuição, prevê-se que eles terão um enorme impacto na forma de viver dentro da Comunidade.

O estabelecimento de um espaço único de radiodifusão é uma ambição antiga dentro da C.E.E., até porque está directamente ligado à liberdade de informação. O "livro verde de radiodifusão", elaborado, em 1984, estabeleceu as medidas a tomar no sentida da criação desse espaço único, que se desejaria concretizar até 1992.

Sendo a informação uma mercadoria própria, cujo crescimento em volume tem sido quase exponencial, mas que também se caracteriza por uma muito rápida desactualizção, a sua facilidade em atravessar fronteiras tem levado a alguns recuos no processo de integração comunitária.

Entretanto, garantida que seja a proteção dos consumidores, a facilidade de acesso à informação virá afectar as transações de mercadorias, que dela dependem decisivamente, transformando radicalmente as redes tradicionais de distribuição e as formas de pagamento, mediamte acordos a nível europeu, entre bancos, comerciantes, produtores e consumidores.

Ao contrário do que acontece com os bens e serviços, a liberdade do **movimento de capitais** não decorre directamente do Tratado de Roma. Esta liberalização implica portanto uma extensão das obrigações comunitárias.

Reconhece-se no entanto que a criação de um autêntico mercado europeu exige uma dimensão financeira, especialmente nas movimentações de curto prazo, directamente ligadas à circulação de pessoas, bens e serviços.

Paralelamente à estabilidade monetária, nomeadamente no que respeita a nível de preços e a taxas de câmbio, a livre movimentação de capitais é condição de desenvolvimento do mercado interior, directamente ligada aos progressos que se venham a verificar no Sistema monetário Europeu.

Na criação de um autêntico mercado interno europeu, há que garantir a facilidade de cooperação industrial, quer no que respeita a empresas que querem actuar em diferentes países, quer na constituição de "joint-ventures", a que se opõem actualmente grandes obstáculos jurídicos, fiscais e administrativos.

A solução actualmente considerada mais simples, e a que têm recorrido a maioria das empresas, é a criação de filiais, mas que em cada país são encaradas juridicamente como entidadse autonomas, publicando as suas contas em separado da firma mãe.

Procura-se actualmente superar essas dificuldades através do estatuto da Sociedade Europeia, como solução opcional para o Pacto Social das empresas.

Ainda na linha da cooperação industrial é necessário dar maiores garantias à propriedade intelectual, quer pela criação de uma marca comunitária, quer por uma maior proteção aos inventos e inovações, através de um aperfeiçoamento da legislação sobre registo de patentes, quer ainda por um tratamento fiscal mais benéfico do capital de risco e inovação.

Finalmente refira-se que a aplicação de direito comunitário não tem sido pacífica, tendo a Comissão Europeia apreciado e deliberado sobre uma centena de casos por ano. No entanto como os recursos para a Comissão atingem as três centenas anuais, as empresas em falta beneficiam de crescentes atrasos no julgamento dos atropelos à legislação comunitária.

É intenção da Comissão, até 1988, estabelecer formas expeditas de resolver a maior parte dos pleitos

que, pelo atraso com que são decididos, dão grande vantagem aos infractores, comprometendo a livre concorrência pretendida.

3.4 Eliminação das Barreiras Fiscais

Desde a conclusão da União Aduaneira, em 1968, que se tornou mais evidente que a aplicação de impostos sobre o valor das vendas acarretava graves distorções ao preço final dos produtos.

Entendeu por isso o Conselho da Europa que a fiscalidade indirecta deveria incidir sobre o valor acrescentado. Em 1970 este entendimento tornou-se regra comunitária, ao definir-se como recursos próprios do orçamento da C.E.E. 1% do imposto sobre valor acrescentado (I.V.A.).

Apesar das grandes dificuldades que acompanharam a introdução do I.V.A., e das numerosas derrogações solicitadas por vário países, o sistema cabou por ser implantado, melhorando consideravelmente as condições de concorrência.

Entretanto continuam por resolver algumas dificuldades iniciais, relativamente a bens importados.

Sendo o I.V.A. pago pelo consumidor do país importador, ele é arrecadado pelo respectivo país, não se tendo em conseguido ainda criar um eficaz sistema de compensação (clearing), que reembolse o país exportador.

Por outro lado o diferente nível de imposição do I.V.A. de Estado para Estado, leva a múltiplos desvios comerciais, especialmente se se tiver em atenção que as fronteiras da C.E.E., atravessam em geral áreas densamente povoadas.

Assim parece inevitável que as fronteiras fiscais se irão manter, enquanto não houver uma aproximação nos níveis de incidência da fiscalidade indirecta.

A experiência dos E.U.A. é, neste caso de grande utilidade, pois tendo os vários estados americanos diferentes impostos, verifica-se que até 5% de diferença da carga fiscal, é possível uma acomodação dos mercados, sem sensíveis distorções.

Generalizando esta solução à Europa, poderia admitir-se um nível de aplicação do I.V.A. entre 14% e 19%, com um nível médio de 16.5%.

Nesta situação apenas a Irlanda e a Dinamarca ficariam excluídas do intervalo considerado, dado que estes países vêm a seguir nos ultimos anos uma política fiscal, que reduz os impostos directos, fazendo elevar os indirectos.

Sendo certo que o nível de fiscalidade afecta directamente as receitas do Estado, a sua alteração traz consideráveis problemas, que têm vindo a suscitar numerosos pedidos de derrogação das directivas do Conselho da Europa.

Julga-se no entanto que estas derrogações deverão ser no menor número possível e sempre limitadas ao tempo indispensável aos ajustamentos fiscais a realizar por cada Estado.

4 DESENVOVIMENTO PORTUGUÊS E POLÍTICA COMUNITÁRIA

As metas quantificadas do desenvolvimento económico português para médio prazo são as seguintes:

Crescimento anual do Produto (P.I.B.)	4% a 5%
Crescimento anual de Consumo	2,5% a 3%
Crescimento anual do Investimento(F.B.C.F.)	8% a 10%
Crescimento anual das Importações	5,5%
Crescimento anual das Exportações	6,0%

Pretende-se que o Investimento seja financiado de forma não inflacionista, sem exageradas importações, e utilizado em iniciativas de moderada intensidade capitalista, em ordem a criar postos de trabalho.

Na sequência desta orientação, a inflação deverá descer para valores em torno dos 5%, a Balança de Transações Correntes não apresentará défices superiores a 500 milhões de dólares U.S.A. e a taxa de desemprego descerá para 7% da população activa até 1990.

As metas económicas fixadas pelo Governo para os próximos anos, embora representem uma inversão de tendências, relativamente à grave depressão sofrida pela economia portuguesa em 1983 e 1984, encontram semelhanças em séries cronológicas das décadas de 60 e 70, pelo que, a efectivarem-se, não constituiriam situação inédita.

Mais do que o valor absoluto dos objectivos propostos, interessa a sua comparação com as economias envolventes, nomeadamente as da Comunidade Europeia.

Portugal, como unidade económica de reduzida dimensão e longa tradição de trocas com o exterior, viveu recentemente um surto de desenvolvimento, no âmbito da Associação Europeia de Comércio Livre (E.F.T.A.).

A dimensão europeia das nossas industrias tradicionais vem da década de 60, quando os mercados do Norte da Europa se abriram à nossa agricultura mediterrânica, a indústria textil teve a

agricultura mediterrânica, a indústria textil teve a sua primeira afirmação internacional, e a fileira florestal, para além da cortiça, ganhou expressão nos produtos lenhosos (pasta para papel, aglomerados e mobiliário).

Com a excepção do ano de 1975, a economia portuguesa cresceu, até 1983, a taxas superiores em 2 pontos à média europeia.

Ultrapassada a recessão de 1983 e 1984, como parecem indicar os valores já disponíneis para 1985 e 1986, uma retoma de actividade deverá ser tambem a retoma do nosso diferencial, o que significará, para taxas de crescimento médio previstas para a C.E.E. de 2.5% a 3%, o nosso natural crescimento de 4% a 5%.

Para além deste diferencial, e só para além dele, poderá dizer-se que a nossa economia ultrapassou as previsões e a integração europeia permitiu "performances" historicamente ainda não atingidos.

Naturalmente que a adesão à C.E.E., encarada como um mal menor, tomará como referência as consequencias de uma marginalização, que resultaria da não adesão.

A nossa situação periférica no continente europeu, e uma tradição literária, saudosista e resignada, que a si mesma se chamou dos "vencidos da vida",ajuda a essa conformada acomodação a grupos de menor capacidade de intervenção, quer por serem os menos desenvolvidos, quer por serem os "pequenos países", quer por serem os Estados do Sul.

Recorde-se no entanto que a posição cimeira de Portugal no Mundo resultou precisamente do estar entre o Norte e o Sul, quando o centro da nossa civilizção abandonou o Mediterrâneo, transformado em pleno campo de batalha, pelos mares do Norte, onde a riqueza começava a refugiar-se e a revolução industrial veio consolidar.

No caminho dessa evolução histórica, último país mediterrânico, que nunca foi, e o primeiro de uma nova civilização atlântica em expansão, Portugal sempre privilegiou o comércio com as praças do Norte.

As feitorias portuguesas em Londres e Bruges, a poucos quilómetros de Bruxelas, as aproximações à Escandinávia, e toda uma estratégia de envolvimento das economias mediterrânicas, mostram-nos, na nossa História, sempre confrontados com o Sul e buscando aliados no Norte.

Ao entrar para a C.E.E., como qualquer membro de pleno direito, Portugal não renunciou a qualquer dos seus objectivos de desenvolvimento económico, mas certamente terá da adaptar as vias para a sua prossecução.

O acervo de legislação comunitária, certamente trará alguns desvios ao comércio, e alguns constrangimentos à livre concorrência de países exteriores à C.E.E.

A nossa Agricultura terá de ganhar nova dinâmica, já delineada no Plano de Desenvolvimento da Agricultura Portuguesa (P.E.D.A.P.). enquanto a Indústria procurará o seu caminho no âmbito do Plano de Desenvovimento da Indústria Portuguesa (P.E.D.I.P.).

O Comércio Externo e o Sistema Financeiro têm o seu Plano de Correcção do Défice Externp (PCEDE), enquanto a Investigação e o Ensino terão de se articular no esforço de recuperação tecnológica empreendido pela Europa Comunitária.

Modernização da Administrção Pública, da Economia, da Investigação e do Ensino, das Relações Internacionais, mais fácil acesso à informação e mais opurtunas tomadas de decisão, concorrência e capacidade competitiva, parecem ser as principais exigências que a Europa felizmente nos impõe.

Adaptar, inovar, e divulgar a um ritmo cada vez mais acelerado terá de ser a resposta do país, afinal aquela que a CEE espera de nós, como contributo para a construção da Comunidade.

STATIONARY STATES ANALYSIS IN TRAVELLING WAVES ON LOSSLESS LINES AND PHYSICAL REALITY

M. de Abreu Faro

Instituto Superior Técnico, Centro de Electrodinâmica da Universidade Técnica de Lisboa

Sumário

No presente trabalho mostra-se que as ondas progressivas podem ser interpretadas como tendo a sua própria identidade.

Isto é particularmente interessante uma vez que nos conduz a uma interpretação da realidade física associada à análise de um regime estacionário em ondas progressivas.

Desta atitude resulta um método rápido e eficiente que permite determinar com grande simplicidade o início de um regime transitório numa linha sem perdas.

Abstract

In the present work it will be shown that the travelling waves can be interpreted as having their own identity.

This is particulary interesting since it points out to a possible interpretation of the physical reality associated with a stationary states'analysis:

From this attitude there results a new method of determining the beginning of a transient in a system of lossless uniform lines.

INTRODUCTION

Transient phenomena on transmission lines is a classical problem in linear system analysis. In a recent work, [1], Tai considers the general methods available in the study of lossless terminated lines and presents two alternative methods: one in the form of a Volterra integral equation and the other corresponding to the so-called singularity expansion method.

The purpose of this work is to present a simple method for the complete determination of the beginning of a transient on a lossless line or system of lines.

In fact, nothing more will be needed than an adequate analysis of the initial stationary state in travelling waves and consider the following evolution of these waves.

Once the initial waves are determinated it is possible to construct the whole chronological sequence of events.

However what is given special enphasis is to the fact that everything happens as if the travelling waves resulting from the analysis of the stationary state could be attributed some physical reality; the stationary state thus being, in fact, a coincidence of waves which preserve their own identity and propagate according to the new ways opened to them or to the new boundary conditions imposed on them.

It may be argued that this is all but a result of the systems linearity. Nevertheless we believe that this question had never before been treated in this light, [1], [2] and [3].

It is not our aim to present in detail the deduction of relations already known from the classical Theory of Transmission Lines. Instead, we shall invariably use a physical approach in the presentation and interpretation of results.

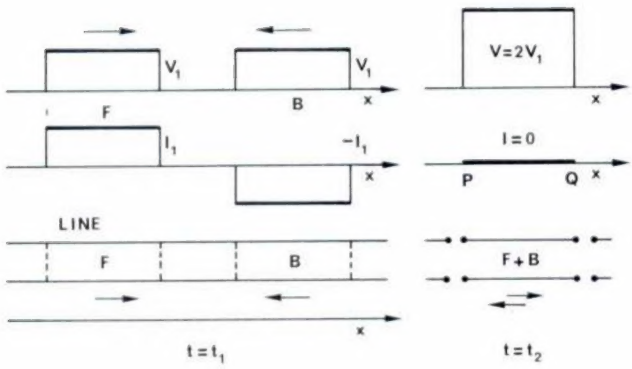


Fig. 1 Two waves, with the same constant voltage distribution propagate in opposite directions. By detaching section PQ where at a given instant they are superposed, an electrostatic regime is obtained.

A POSSIBLE INTERPRETATION OF AN ELECTROSTATIC STATE AND ASSOCIATED METHOD

Let us consider Fig.1 where two waves are represented as propagating in opposite directions on a distortionless transmission line. We shall designate them, relatively to the xx axis, by the forward wave F and the backward wave B, respectively.

When we say one wave we are implicity considering two waves related by a wave characteristic impedance. And since in TEM modes voltage and current can be unambiguosly defined, we shall be dealing with voltage and current waves.

When suitable, we shall write $F[V_F, I_F]$ and $B[V_B, I_B]$ subject to the well know relations

$$V_F(t-x/c_m) = Z_0 I_F(t-x/c_m) \quad (1a)$$

$$V_B(t+x/c_m) = -Z_0 I_B(t+x/c_m) \quad (1b)$$

where $c_m = 1/(LC)^{1/2} = 1/(\mu\varepsilon)^{1/2}$ stands for the propagation velocity and $Z_0 = (L/C)^{1/2}$ for the characteristic impedance of the F wave. For the B wave we have as known, a characteristic impedance $(-Z_0)$.

In the present case the voltage waves V_F and V_B are two equal rectangular pulses of amplitude V_1. Thus, it can be easily concluded from (1, a, b) that the current waves are also two rectangular pulses of the same amplitude but of opposite sign. We shall then have $F[V_1, I_1]$ and $B[V_1, -I_1]$ with $V_1 = Z_0 I_1$.

At a given instant each wave occupies a corresponding section of the line - its spacial "duration" - taking the values indicated in brackets and becoming null outside this interval. According to Fig.1 in time t_1 the pulses are separated and in time t_2 they are coincident with a resulting voltage $2V_1$ in PQ and a null resulting current.

In a conceptual experiment we promote exactly in time t_2 the separation of the PQ section from the remaining part of the line. The two waves $F[V_1, I_1]$ and $B[V_1, -I_1]$ are now trapped in the PQ section.

But at instant t_2 the two coincident waves originated, in space, the distribuitions $[V=2V_1, I=0]$ which thus caracterize the state of PQ section at that instant.

What is going to happen next with relation to these distributions?

Nothing, in fact.

An observer who is not aware of the way this events took place, and who merely realizes that he is in the presence of an electrostatically charged line, will simply say that, if the solution is there, there is no reason to suffer any change.

The observer who made the experiment, knowing that the waves are superposed in their effects but do not interact, cannot see any reason for the waves to alter their movement and form. Electric energy and magnetic energy keep on propagating at velocity c_m for the F wave and $(-c_m)$ for the B wave.

This would indeed be so if the line continued to left and to right but, in fact, it was interrupted at Q.

Being acquainted with the reflection theory the observer will then say that the F wave is reflected on the open extreme Q to which there corresponds a voltage coefficient (+1) and a current reflection coefficient (-1), but this implies that the B wave is being regenerated at Q. In the meantime B moved towards P where it is being reflected and consequently F is also being regenerated.

Both observers will agree that voltage and current distribuitions are maintained and equal to $[V=2V_1, I=0]$. There is, nevertheless, an important difference between them. The first observer is limited to a solution which corresponds to the integration of Laplace equation, $\nabla^2 V = 0$, with the boundary condition that both conductors be equipotentials differing by $2V_1$. This, however, does not enable him to formulate an immediate judgement as to what will happen if that charged line is connected to an uncharged one.

The second observer is in posssession of a mechanism which, at least for that situation, fits the experiment. Believing in his mechanism he will also believe that the waves keep on moving, F generating B, B generating F.

If at a given instant the charged line (line 1) is connected to an uncharged one (line 2), this observer is enabled to say what will happen, Fig. 2.

In fact, believing in the existence of two waves and in their movement, he will consistently reason in the following way:

The F wave no longer sees an open-circuited line

at Q but a second line where the waves will have, in principle, a different characteristic impedance. Since on this line there can only be one transmitted F wave, which we shall designate by F_t, everything happens as if the first line were itself connected to a resistence $R_s = Z_{02}$. Since $Z_{02} \neq Z_{01}$, we ultimately have: The F wave at junction 1-2 generates F_t with a transmission coefficient K_t. Furthermore it also generates a reflected wave F_r with a reflection coefficient K_r. It should be noted that the reflection of an F wave originates an F_r wave which propagates in a backward direction, the index "r" indicating this change of direction.

As to the B wave, it reflects on P with $K_r = 1$ generating a reflected wave B_r. It should be noticed that the tail of the B wave does not act on Q, it was merely generated there. Nor it is perturbed by F_r since this wave progresses at the same velocity at which B moves away from Q.

With respect to propagation velocity, note that it may be different on lines 1 and 2. However, in the example provided by Fig. 2 the propagation velocities were assumed to be the same, $c = c_1 = c_2$.

The solution arrived at through this interpretation coincides with that which would be obtained by using conventional methods.

Apart from generalization to other situation, what has been said is enough to substantiate the method presented.

However, for an unambiguous and reliable application of the method, some additional remarks will be needed.

AN EXAMPLE

With the aim referred to in the previous section, we are now going to consider in detail the case mentioned above.

The results will be established with generality but, for illustration purposes, we have worked out an example corresponding to $Z_{02} = 3Z_{01}$ and $c_1 = c_2 = c$ represented to scale in Fig. 2.

On line 1 the initial distributions are $[V = V_0, I = 0]$ and the same connection to line 2 is made at the instant $t = 0$.

Before the connection, $t < 0$, we shall have two waves of the same amplitude $V_F = V_B = V_0/2$ propagating in opposite directions and reflecting on the open extremes.

At instant t_1, after the connection, the method in questions predicts the following facts:

- The F wave generates a transmitted wave F_t that progresses (ct_1) on line 2. The transmission coefficient is given by

$$K_t = 2Z_{02}/(Z_{02} + Z_{01}) \qquad (2a)$$

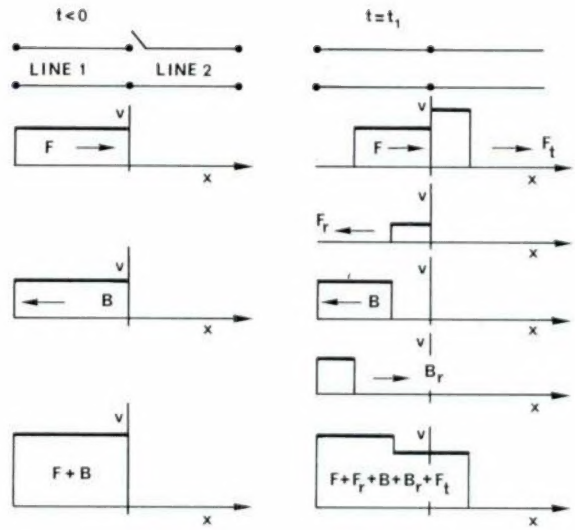


Fig. 2 Connection of an electrostatically charged line to an uncherged one. The elementary waves where the initial state is analysed keep on travelling originating reflected and transmitted waves.
From the superposition of all the waves there results the geginning of the transient.

-The same F wave generates at junction 1-2 a reflected wave Fr that progresses (ct_1) on line 1 with a reflection coefficient given by

$$K_r = (Z_{02} - Z_{01})/(Z_{02} + Z_{01}) \qquad (2b)$$

- The B wave reflects on the open extreme originating a reflected wave B_r which progresses (ct_1) on line 1. In this case the voltage reflection coefficient is $(+1)$. Note that B_r propagates in the forward direction.

-Besides these facts, also note that:

The tail of F has moved away (ct_1) from the open extreme.

The tail of B has moved away (ct_1) from junction 1-2.

Before the connection, F and B occupied the whole lenght of line 1 but this was due to the fact that, continuously, by reflection F generates B on one extreme and B generates F on the other.

From now on we will designate these reflected waves by F_r and B_r. The wave F and the B wave have ceased to be compensated and so the moving away of the tails of these waves means a decrease of their lenght in (ct_1), Fig. 2.

From all this there results, on line 2, a voltage wave V_2 which is exactly the voltage associated with F_t and therefore

$$V_2 = V_F K_t = V_0 K_t/2 = [Z_{02}/(Z_{02} + Z_{01})]V_0 \qquad (3)$$

On line 1 we shall have a voltage wave V_1 due to the superposition of the waves F_r and F: